Universitatea ,,Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

SINTEZA LUCRĂRILOR - 2009

Grant: PN-II-IDEI-PCE-2007-1 (Proiecte de cercetare exploratorie)

Contract nr.: 29/01.10.2007.

Cod CNCSIS: ID_532

Titlul proiectului: *"ECHIVALENŢE DE CATEGORII ÎN TEORIA REPREZENTĂRILOR DE GRUPURI FINITE"*

Aprecieri generale

În conformitate cu proiectului de cercetare aferent anului 2009 (perioada 01.11.2008 – 15.09.2009), echipa de cercetare şi-a concentrat activitatea asupra investigării unor categorii cu relevanţă în studiul reprezentărilor unor clase speciale de grupuri finite şi algebre finit dimensionale, în special investigarea echivalenţelor Morita şi derivate între blocuri ale grupurilor finite şi ale unor algebre asociate cu acestea.

Cercetările s-au efectuat pe două direcţii principale prezentate în detaliu în proiect, şi anume:

1) Elaborarea de metode noi provenind din teoria modulelor pentru studiul G-algebrelor si al grupurilor punctate.

2) Studiul echivalenţelor (Morita, Rickard, stabile) între categorii de module peste diferite tipui de extensii de algebre (algebre graduate, extensii Hopf-Galois), studiul invarianţilor acestor echivelenţe, cu aplicatii în teoria reprezentărilor de grupuri finite, în particular, în teoria Clifford.

3) Dezvoltarea de noi metode computaţionale pentru studiul indicilor Schur ai caracterelor şi de metode teoretice în cazul reprezentărilor peste corpuri arbitrare.

4) Studiul algebrelor grupale ale grupurilor finite peste corpuri de caracteristică zero cu aplicaţii în studiul unităţilor de inele grupale.

Comunicări la seminarii de cercetare în 2009

Rezultate obţinute până acum au fost întai comunicate de către membri ai proiectului la seminarul ştiintific aferent proiectului, precum şi pe plan internaţional în cadrul seminariilor de cercetare organizate de echipe de algebrişti din alte universităţi.

1. Conferinţa ,,*A computational approach for the Wedderburn decomposition of group algebras*", susţinută de către **G. Olteanu** la Seminarul de cercetare al Departamenului de Matematica, Universitatea Libera din Bruxelles, Belgia, 03.04.2009.

Situaţia lucrărilor raportate în anul 2008

Ca urmare a activităţii din 2008 a apărut următorul articol, a cărui descriere este cuprinsă în sinteza lucrărilor pe anul 2008:

[1] Andrei Marcus, *Derived invariance of Clifford classes*, J. Group Theory **12** (2009), 83–94. (ISI)

Lucrări elaborate în anul 2009

În conformitate cu criteriile de performanţă preconizate pentru acest an, rezultatele obţinute s-au concretizat în redactarea lucrărilor descrise mai jos şi care sunt fie publicate, fie acceptate pentru publicare.

[1] Stefaan Caenepeel, **Andrei Marcus**, *Hopf-Galois extensions and an exact sequence for H-Picard groups*, va apărea în Journal of Algebra. (ISI)

[2] **Andrei Marcus**, *Derived equivalences and the abelian defect group conjecture*, Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babeş-Bolyai" University Cluj, 2008; pp. 111–131. (BDI)

[3] Septimiu Crivei, **Gabriela Olteanu**, *GAP algorithms for finite abelian groups and applications*, Carpathian J. Math. **24** (2008), no. 3, 310–316. (ISI)

[4] **Gabriela Olteanu**, *Computation and applications of Schur indices*, Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory (Cluj–Napoca, Romania, July 7–12, 2008), Cluj University Press, Cluj–Napoca, 2009, pp. 149–157. (BDI)

[5] Allen Herman, **Gabriela Olteanu**, Ángel del Ro, *The gap between the Schur group and the subgroup generated by cyclic cyclotomic algebras*, va apărea în Israel J. Math. (ISI)

[6] **Constantin Cosmin Todea**, *Remarks on generalized Brauer pairs*, va apărea în Mathematica (Cluj). (BDI)

[7] **Tiberiu Coconeţ**, *Remarks on induction of G-algebras and skew group algebras*, va apărea în Mathematica (Cluj). (BDI)

[8] Simion Breaz, Septimiu Crivei, **Andrei Marcus**, Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babeş-Bolyai" University Cluj, 2008; Cluj University Press, 2009. ISBN 978-973-610-897-6. (BDI)

Descrierea lucrărilor din 2009

[1] Stefaan Caenepeel, **Andrei Marcus**, *Hopf-Galois extensions and an exact sequence for H-Picard groups*

Scopul acestui articol este următoarea generalizare, prezentată în Secţiunea 6 articolului, a rezultatului principal din M. Beattie şi Á. del Río [2] (a se vedea [12] pentru o abordare bazată pe [11]).

Teorema 1 *Fie H o algebră Hopf cocomutativă peste corpul k. Fie A o extindere H-Galois fidelă şi plată. Atunci există un şi exact*

$$1 \to H^1(H, Z(A^{\mathrm{co}H})) \xrightarrow{g_1} \mathrm{Pic}^H(A) \xrightarrow{g_2} \mathrm{Pic}(A^{\mathrm{co}H})^H \xrightarrow{g_3} H^2(H, Z(A^{\mathrm{co}H})).$$

Aici $H^*(H, Z(A^{\mathrm{co}H}))$ sunt grupurile de cohomologie Sweedler (faţă de acţiunea Miyashita-Ulbrich a lui H în $Z(A^{\mathrm{co}H})$), $\mathrm{Pic}(A^{\mathrm{co}H})^H$ este grupul elementelor H-invariante ale $\mathrm{Pic}(A^{\mathrm{co}H})$ şi $\mathrm{Pic}^H(A)$ este grupul claselor de izomorfie ale bimodulelor Hopf relative inversabile. Mai mult, g_1 şi g_2 sunt omomorfisme de grupuri, în timp ce g_3 nu este. Se prezintă o demonstraţie a teoremei utilizând idei din [12] şi rezultate din [3] şi [13], obţinând în acest fel o interpretare interesantă a teoremei anterioare în termeni ai extendibilităţii Clifford la A a $A^{\mathrm{co}H}$-modulelor.

Articolul este organizat după cum urmează. În Secţiunea 1 se prezintă contextul general, care presupune extinderi Hopf-Galois, acţiunea Miyashita-Ulbrich şi, cel mai important, conceptele contextelor H-Morita şi $\Box_H$-Morita introduse în [3], şi relaţiile lor cu algebrele Hopf. Principalul rezultat al Secţiunii 2 spune că dacă H este cocomutativ şi A este o extindere H-Galois fidelă şi plată a lui $B := A^{\mathrm{co}H}$, atunci produsul cotensorial $A^{\Box e} := A\Box_H A^{\mathrm{op}}$ este o extindere H-Galois fidelă şi plată a algebrei înfăşurătoare $B^e := B \otimes B^{\mathrm{op}}$. În prima parte a Secţiunii 4 se discută cazul particular când A este o extindere cleft a algebrei comutative $B := A^{\mathrm{co}H}$, şi în mod special, caracterizarea situaţiei în termeni ai coomologiei Sweedler 1- şi 2-. În a doua parte a Secţiunii 4 se trec în revistă şi se adaptează nevoilor noastre rezultatele lui G. Militaru şi D. Stefan [13] despre extendibilitatea Clifford a modulelor. Extinderea cleft în discuţie este subalgebra $E := {}_A\mathrm{END}(A \otimes_B M)^{\mathrm{op}}$ a elementelor raţionale în ${}_A\,\mathrm{End}(A \otimes_B M)^{\mathrm{op}}$, unde M este un B-modul H-invariant, şi $E^{\mathrm{co}H} \simeq {}_B\,\mathrm{End}(M)^{\mathrm{op}}$ se consideră a fi comutativ. În Secţiunea 5 se introduce grupul H-Picard $\mathrm{Pic}^H(A)$ şi grupul $\Box_H$-Picard $\mathrm{Pic}^{\Box_H}(A^{\mathrm{co}H})$ al $A^{\mathrm{co}H}$. Este o consecinţă a rezultatelor din [3] că grupurile $\mathrm{Pic}^H(A)$ şi $\mathrm{Pic}^{\Box_H}(A^{\mathrm{co}H})$ sunt izomorfe. În situaţia în care H este cocomutativ, se poate introduce subgrupul $\mathrm{Pic}(A^{\mathrm{co}H})^H$ al lui $\mathrm{Pic}(A^{\mathrm{co}H})$ format din elementele H-stabile ale $\mathrm{Pic}(A^{\mathrm{co}H})$ (vezi Secţiunea 5b). Definiţile funcţiilor g_1, g_2 şi g_3, precum şi demonstraţia teoremei principale sunt prezentate în Secţiunea 6. Principalele ingrediente aici sunt date de aplicaţia teoremei lui Militaru-Stefan de ridicare la un (B, B)-bimodul M care este H-stabil inversabil , considerând extinderea $E := {}_{A^{\square e}}\mathrm{END}(A^{\square e} \otimes_{B^e} M)^{\mathrm{op}}$ a lui $E^{\mathrm{co}H} \cong Z(B)$. A se observa că acţiunea lui H asupra lui $Z(B)$ ce vine de la E este aceeasi cu acţiunea Miyashita-Ulbrich ce vine de la A şi astfel este independentă de M. Secţiunea 7 este dedicată analizei funcţiei g_3. Rezultă că acţiunea $\mathrm{Pic}(B)$ în $Z(B)$ induce o acţiune a lui $\mathrm{Pic}(B)^H$ în $H^n(H, Z(B))$, şi că g_3 este un 1-cociclu al grupului $\mathrm{Pic}(B)^H$ cu valori în $H^2(H, Z(B))$.

Şirul exact care descrie $\mathrm{Pic}^H(A)$ dat în Secţiunea 6 se păstează în cazul în care H este cocomutativ; în cazul general, putem încă da o descriere a lui $\mathrm{Pic}^H(A)$, în cazul în care coinvarianţii lui A coincid cu corpul de bază, adică A este un obiect H-Galois. Acestea sunt prezentate în Secţiunea 9, şi presupun teoria Schauenburg a obiectelor bigalois.

[2] Andrei Marcus, *Derived equivalences and the abelian defect group conjecture.*

Similitudini între tabla caracterelor unui bloc cu grupul defect abelian şi corespondentul să Brauer au fost observate de multă vreme. Aceasta a condus la sfârsitul anilor 1980 la convingerea că o conexiune mai profundă între două blocuri trebuie să existe. În acest articol trecem în revistă o introducere a aplicaţiilor echivalenţelor categoriale în teoria reprezentărilor modulare şi a conjecturii grupului defect abelian a lui Broué. Prezentăm câteva dintre metodele şi ultimele rezultate despre acest subiect, cu o atenţie sporită asupra tehnicilor care provin din teoria Clifford.

[3] Septimiu Crivei, **Gabriela Olteanu**, *GAP algorithms for finite abelian groups and applications*

În acest articol se studiază şi se propun algoritmi GAP care determină grupuri abeliene finite sau subgrupuri ale lor având anumite proprietăţi de natură laticială. Se arată de asemenea utilitatea acestora în obţinerea de exemple sugestive şi de rezultate teoretice.

O colecţie de algoritmi GAP pentru grupuri abeliene finite a fost deja construită de către S. Crivei, G. Olteanu şi S. Şuteu-Szöllősi în [4]. Astfel de algoritmi reprezintă unelte importante şi utile atât în obţinerea de exemple care implică o cantitate mare de calcule cât şi în testarea anumitor conjecturi înainte de demonstrarea lor riguroasă. Folosind exemplele şi algoritmii prezentaţi în lucrare am demonstrat următoarea teoremă de structură pentru UC-p-grupuri finite abeliene.

Teorema 2 *Un p-grup finit abelian G este un UC-grup dacă şi numai dacă G este ori semisimplu ori uniform (adică, ori $G \cong \mathbb{Z}_p^l$ ori $G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ cu $l, k \geq 1$ numere naturale).*

Principalul rezultat teoretic obţinut prezintă o descriere a subgrupurilor tip ale unui grup abelian.

Teorema 3 *Un subgrup al grupului G este un subgrup tip dacă şi numai dacă este un subgrup Hall.*

[4] Gabriela Olteanu, *Computation and applications of Schur indices*

În acest articol trecem în revistă metode de calcul ale indicilor Schur ai algebrelor Schur precum şi posibile aplicaţii ale acestora în studiul altor probleme precum obţinerea de informaţii utile pentru calculul descompunerii Wedderburn a algebrelor grupale raţionale şi pentru calculul grupului automorfismelor algebrelor grupale semisimple.

Indicele Schur al unei algebre Schur este un invariant al algebrei care rezultă a fi util în studiul altor probleme. Poate fi privit ca informaţie complementară ce poate fi adăugată datelor obţinute anterior. De exemplu, în cazul descrierii componentelor simple ale descompunerii Wedderburn a algebrelor grupale raţionale, cunoaşterea indicilor Schur locali furnizează uneori informaţia lipsă a descrierii obţinute cu diferite metode. Se prezintă un astfel de exemplu care ilustrează acesată situaţie. În exemplul menţionat, calculul indicilor Schur locali ai unei algebre simple rezultate în urma descompunerii Wedderburn a unei algebra grupale raţionale este esenţial pentru a obţine o descriere precisă a acesteia ca fiind echivalentă Brauer cu o algebră ciclotomică. În [17] a fost prezentat un algoritm teoretic pentru calculul descompunerii Wedderburn a algebrelor grupale semisimple KG, pentru G un grup finit şi K un corp de caracteristică zero, bazat pe o abordare computaţională a teoremei lui Brauer–Witt. În [18], algoritmul teoretic a fost îmbunătăţit şi a fost prezentat un algoritm practic, care a fost suportul pentru implementarea acestei metode într-un pachet informatic numit `wedderga` petru sistemul GAP. Algoritmul teoretic are ca date de intrare o algebră grupală KG şi ca rezultat componentele Wedderburn A_χ, parametrizate de representanţi ai claselor de K-echivalenţă ai caracterelor ireducibile ale grupului finit G. Componentele A_χ sunt descrise ca $M_{d_1/d_2}(B)$, unde d_1 este gradul caracterului χ, d_2 este gradul algebrei ciclotomice B calculate.

Grupul de ordin cel mai mic pentru care informaţia obţinută cu rezultatele anterioare nu este suficientă pentru a decide imediat care este descrierea exactă a algebrei este grupul $[240, 89]$ din librăria sistemului GAP. În exemplul prezentat în ultima secţiune a articolului, se calculează indicii Schur locali ai algebrei simple corespunzătoare unui caracter ai grupui menţionat anterior şi se prezintă descrierea dorită a componentei Wedderburn a algebrei grupale raţionale corespunzătoare.

[**5**] Allen Herman, **Gabriela Olteanu**, Ángel del Ro, *The gap between the Schur group and the subgroup generated by cyclic cyclotomic algebras*

Fie K o extindere abeliană a corpului numerelor raţionale. Fie $S(K)$ grupul Schur al lui K si fie $CC(K)$ subgrupul lui $S(K)$ generat de clasele de echivalenţa Brauer conţinând algebre ciclice ciclotomice. În acest articol se caracterizează când $CC(K)$ are indice finit în $S(K)$ în termeni ai poziţiilor relative ale lui K în laticea extinderilor ciclotomice ale corpului numerelor raţionale. Scopul acestui articol este să studieze distanţa dintre grupul $S(K)$ şi grupul $CC(K)$, ambele privite ca subgrupuri în grupul Brauer $\mathrm{Br}(K)$, în termeni ai poziţiilor si structurii corpului de bază K.

[**6**] **Constantin Cosmin Todea**, *Remarks on generalized Brauer pairs*

Fie k un corp algebric închis de caracteristică p, G un grup finit, N un subgrup normal al lui G şi c un bloc G-stabil al lui kN. Atunci există perechi Brauer generalizate numite perechi (c, G)-Brauer şi notate cu (Q, e_Q), unde Q este un p-subgroup al lui G şi e_Q este un bloc al lui $kC_N(Q)$. Dacă $G = N$, perechile Brauer generalizate devin perechile c-Brauer uzuale. Dacă (P, e_P) este o pereche maximală (c, G)-Brauer, se demonstrează că e_P este un bloc nilpotent. Se arată de asemenea următoarea generalizare a celei de-a treia teoreme a lui Brauer.

Teorema 4 *Fie c blocul principal al lui kN, unde N este normal îG şi Q este orice p-subgroup al lui G. Atunci avem:*

a) Blocul principal c este G-stabil.

b) $\mathrm{Br}_Q^N(c)$ este un idempotent primitiv în $Z(kC_N(Q))$ şi este blocul principal block al lui $kC_N(Q)$.

c) (Q, e) este o pereche (c, G)-Brauer dacă şi numai dacă e este blocul principal al lui $kC_N(Q)$.

d) Grupurile (c, G)-defect ale lui c sunt p-subgrupurile Sylow ale lui G.

[**7**] **Tiberiu Coconeţ**, *Remarks on induction of G-algebras and skew grup algebras*

În prima secţiune se dă o versiune în termeni ai grupurilor punctate a unui rezultat al lui Dade despre teoria Green. Legat de aceasta, în a două secţiune se consideră o H-algebră B, unde H este un subgrup al grupului finit G. Pentru algebra grupala skew $B * H$, se arată că inducţia acesteia la G în sensul lui Puig este izomorfă cu algebra grupală skew peste G a inducţiei, în sensul lui Turull, al lui B la G. Mai exact, avem următorul rezultat.

Teorema 5 *Aplicaţia*

$$\varphi : \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} S \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}G \to R, \quad g \otimes s \otimes f \mapsto g \cdot s \cdot f,$$

unde $g, f \in G$ şi $s \in S$, este un izomorfism G-graduat de algebre G-interioare, şi diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} S \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}G \arrow[r] & R \\
\mathcal{O}G \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

de algebre G-interioare G-graduate ste comutativeă.

[8] Simion Breaz, Septimiu Crivei, **Andrei Marcus**, Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babeş-Bolyai" University Cluj, 2008

Conferinţa "Internaţional Conference on Modules and Representation Theory", Cluj-Napoca, July 7–12, 2008" a fost o conferinţă satelit acelui de-al 5-lea congres european "European Congress of Mathematics", Amsterdam, July 14–18, 2008. Evenimentul a fost organizat de către Grupul de Algebră al Facultăţii de Matematică şi Informatică a Universităţii "Babeş-Bolyai" din Cluj-Napoca, Romania. Scopul conferinţei a fost să adune impreună specialişti şi cercetători interesaţi în teoria modulelor, teoria representărilor grupurilor finite şi a algebrelor, teoria grupurilor abeliene şi alte domenii relaţionate cu acestea. A fost garantat un nivel ridicat al conferinţei printr-o listă a invitaţilor conţinând cercetători de seamă din domeniile precizate. Mai mult de 60 de matematicieni din întreaga lume, atât cercetători renumiţi cât şi tineri cercetători, au creat o atmosferă excelentă în timpul conferinţei. Au fost 14 conferinţe invitate de câte 50 de minute şi aproximativ 30 de prezentări de câte 25 minute. Acestea s-au materializat în 17 articole acceptate pentru publicare în proceeding-ul nostru. Articolele sunt majoritatea articole de tip survey, dar sunt de asemenea şi articole originale. Acestea acoperă principalele teme ale conferinţei: teoria modulelor, teoria reprezentărilor grupurilor finite şi a algebrelor şi domenii relaţionate cu acestea.

Bibliografie

[1] M. Beattie and A. del Río, The Picard group of a category of graded modules, *Comm. Algebra* **24** (1996), 4397–4414.

[2] M. Beattie and A. del Río, Graded equivalences and Picard groups, *J. Pure Appl. Algebra* **141** (1999), 131–152.

[3] S. Caenepeel, S. Crivei, A. Marcus and M. Takeuchi, Morita equivalences induced by bimodules over Hopf-Galois extensions, *J. Algebra* **314** (2007), 267–302.

[4] S. Crivei, G. Olteanu and Ş. Şuteu-Szöllősi, *ELISA - A collection of GAP algorithms related to extending and lifting abelian groups.* `http://www.gap-system.org/Packages/undep.html` and `http://math.ubbcluj.ro/~crivei/GAP_project.`

[5] The GAP Group, *GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4*; 2006. `http://www.gap-system.org.`

[6] A. Herman, G. Olteanu and Á. del Río, *Ring isomorphism of cyclic cyclotomic algebras*, Algebr. Represent. Theory. **12** (2009), no. 2–5, 365–370.

[7] A. Herman, G. Olteanu and Á. del Río, *The Schur group of an abelian number field*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), no. 1, 22–33.

[8] A. Herman, G. Olteanu and Á. del Río, *The gap between the Schur group and the subgroup generated by cyclic cyclotomic algebras*, va apărea în Israel J. Math.

[9] W. Klasen and P. Schmid *Induced crossed products.* Commun. Algebra **18** (1990), 2573–2586.

[10] J. Haefner and A. del Río, Actions of Picard groups on graded rings, *J. Algebra* **218** (1999), 573–607.

[11] A. Marcus, Equivalences induced by graded bimodules, *Comm. Algebra* **26** (1998), 713–731.

[12] A. Marcus, On Picard groups and graded rings, *Comm. Algebra* **26** (1998), 2211–2219.

[13] G. Militaru and D. Ştefan, Extending modules for Hopf Galois extensions, *Comm. Algebra* **22** (1994), 5657–5678.

[14] Marcus, A., *Representation Theory of Group Graded Algebras*, Nova Science Publishers, Commack, NY, 1999.

[15] Marcus, A., *Twisted group algebras, normal subgroups and derived equivalences.* Algebr. Represent. Theory **4** (2001), 25–54.

[16] Navarro, G., *The McKay Conjecture and Galois automorphisms.* Ann. of Math. **160** (2004), 1-12.

[17] G. Olteanu, *Computing the Wedderburn decomposition of group algebras by the Brauer–Witt theorem*, Math. Comp. **76** (2007), 1073–1087.

[18] G. Olteanu and Á. del Río, *An algorithm to compute the Wedderburn decomposition of semisimple group algebras implemented in the GAP package* `wedderga`, J. Symbolic Comput. **44** (2009), no. 5, 507–516.

[19] Puig, L., *Pointed groups and constructions of modules*, J. Algebra **116**, 7–129, 1988.

Director de Proiect
Prof.dr. Andrei Mărcuş