Universitatea ,,Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

SINTEZA LUCRĂRILOR - 2008

Grant: PN-II-IDEI-PCE-2007-1 (Proiecte de cercetare exploratorie)

Contract nr.: 29/01.10.2007.

Cod CNCSIS: ID_532

Titlul proiectului: *"ECHIVALENŢE DE CATEGORII ÎN TEORIA REPREZENTĂRILOR DE GRUPURI FINITE"*

Aprecieri generale

În conformitate cu proiectului de cercetare aferent anului 2008 (perioada 01.01.2008 – 20.10.2008), echipa de cercetare şi-a concentrat activitatea asupra investigării unor categorii cu relevanţă în studiul reprezentărilor unor clase speciale de grupuri finite şi algebre finit dimensionale, în special investigarea echivalenţelor Morita şi derivate între blocuri ale grupurilor finite şi ale unor algebre asociate cu acestea.

Cercetările s-au efectuat pe două direcţii principale prezentate în detaliu în proiect, şi anume:

1) Elaborarea de metode noi provenind din teoria modulelor pentru studiul G-algebrelor si al grupurilor punctate.
2) Stabilirea de echivalenţe (Morita, Rickard, stabile) între categorii de module peste algebre simetrice, cu aplicatii în teoria reprezentărilor de grupuri finite.
3) Dezvoltarea de noi metode computaţionale pentru studiul indicilor Schur ai caracterelor şi de metode teoretice în cazul reprezentărilor peste corpuri arbitrare.
4) Studiul algebrelor grupale ale grupurilor finite peste corpuri de caracteristică zero cu aplicaţii în studiul unităţilor de inele grupale.

Menţionăm organizarea conferinţe internaţionale "*Modules and Representation Theory*", la Universitatea ,,Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca, în perioada 7-12 iulie 2008, care se încadrează în direcţiile de cercetare ale proiectului.

Comunicări la seminarii de cercetare în 2008

Rezultate obţinute până acum au fost întai comunicate de către membri ai proiectului la seminarul ştiintific aferent proiectului, precum şi pe plan internaţional în cadrul seminariilor de cercetare organizate de echipe de algebrişti din alte universităţi astfel:

1. Conferinţa ,,*Crossed products, Brauer groups and Clifford classes*" susţinută de către A. Marcus la Vrije Universiteit Brussel, 19.10.2007.
2. Conferinţa ,,*Derived invariance of Clifford classes*" susţinută de către A. Marcus la Leibniz Universitat Hannover, Germania, 13.11.2007.
3. Conferinţa ,,*Wedderburn decomposition of group algebras. A computational approach with applications to Schur groups and units*" susţinută de către G. Olteanu la seminarul de cercetare de algebră, Cluj-Napoca, 26.03.2008.
4. Conferinţa ,,*Ring isomorphism of cyclic cyclotomic algebras*", susţinută de către G. Olteanu la conferinţa "Modules and Representation Theory", Universitatea "Babeş-Bolyai", Cluj-Napoca, 08.07.2008.
5. Conferinţa ,,*Derived invariance of Clifford classes*" susţinută de către A. Marcus la National University of Ireland, Maynooth, Irlanda, 19.08.2008.
6. Conferinţa ,,*Ring isomorphism of cyclic cyclotomic algebras*", susţinută de către G. Olteanu la National University of Ireland, Maynooth, Irlanda, 22.08.2008.
7. Conferinţele ,,*Equivalences of categories in modular representation theory*", ,,*Morita equivalences induced by bimodules over Hopf-Galois extensions*" şi ,,*Characters and equivalence classes of central simple group graded algebras*" susţinute de către A, Marcus la Beijing Normal University, China, 14-27.09.2008.

8. Conferinţa ,,*Hopf-Galois extensions and an exact sequence for H-Picard groups*" susţinută de către A. Marcus la Institutul de Matematica din Budapesta, 06.10.2008.

Situaţia lucrărilor raportate în anul 2007

Ca urmare a activităţii din 2007 a apărut următorul articol, a cărui descriere este cuprinsă în sinteza lucrărilor pe anul 2007:

[**1**] **Camelia Dicu**, *On the multiplicity module of a pointed group*, Mathematica (Cluj), **50** (73), No.1 (2008), 31-37. (indexată BDI)

Lucrări elaborate în anul 2008

În conformitate cu criteriile de performanţă preconizate pentru acest an, rezultatele obţinute s-au concretizat în redactarea lucrărilor descrise mai jos şi care sunt fie publicate, fie acceptate pentru publicare.

[**2**] **Camelia Dicu**, *Metode modul-teoretice in studiul G-algebrelor si al grupurilor punctate*, Editura EFES, Cluj-Napoca, 2008, 92pp, ISBN 978-606-526-002-3.

[**3**] **Gabriela Olteanu**, *Wedderburn decomposition of group algebras and applications*, Editura EFES, Cluj-Napoca, 2008, 165pp, ISBN 978-973-7677-98-3.

[**4**] Allen Herman, **Gabriela Olteanu**, Ángel del Ro, *The Schur group of an abelian number field*, Journal of Pure Applied Algebra **213** (2009), 22-33. (ISI)

[**5**] **Andrei Marcus**, *Indecomposable modules over group graded skew algebras*, Mathematica (Cluj), **50** (73), No.2 (2008), 191-195. (indexată BDI)

[**6**] **Andrei Marcus**, *Derived invariance of Clifford classes*, acceptat, va apărea in Journal of Group Theory. (ISI)

Descrierea lucrărilor din 2008

[**2**] **Camelia Dicu**, *Metode modul-teoretice in studiul G-algebrelor si al grupurilor punctate*

Lucrarea conţine rezultate din teza de doctorat a autoarei şi care au fost publicate în articolul raportat [**1**], precum şi în [3, 4, 5].

[**3**] **Gabriela Olteanu**, *Wedderburn decomposition of group algebras and applications*

Descompunerea Wedderburn a unei algebre grupale semisimple FG este descrierea lui FG ca sumă directă de algebre simple, adică ideale minimale bilaterale. Principala noastră motivaţie pentru studiul descompunerii Wedderburn a algebrelor grupale este dată de aplicaţiile pe care aceasta le are. Principalele aplicaţii care au fost avute în vedere sunt studiul grupului unităţilor inelelor grupale cu coeficienţi de tip aritmetic şi grupuri Schur de corpuri numerice abeliene. Alte aplicaţii ale descompunerii Wedderburn pe care le-am avut în vedere în timpul elaborării acestei cărţi, deşi nu le-am studiat pe larg, sunt studiul grupului automorfismelor algebrelor grupale, problemei izomorfismului pentru algebre grupale şi codurilor corectoare de erori cu structură de ideal într-o algebră grupală, cunoscute ca şi coduri grupale.

Prezenta monografie este dedicată studiului calculului explicit şi efectiv al descompunerii Wedderburn a algebrelor grupale de grupuri finite peste corpuri de caracteristică zero. Metoda prezentată se bazează în principal pe o demonstraţie algoritmică a teoremei Brauer–Witt. Teorema Brauer–Witt este strâns legată de studiul subgrupului Schur al grupului Brauer, studiu început de către I. Schur la începutul secolului trecut. Mai apoi, în 1945 R. Brauer a demonstrat că fiecare reprezentare ireductibilă a unui grup finit G de exponent n se poate realiza în orice corp care conţine o rădăcină de ordinul n primitivă a unităţii, rezultat care a permis dezvoltări ulterioare. La începutul anilor 1950, R. Brauer şi E. Witt au arătat independent că probleme legate de subgrupul Schur se pot reduce la algebre ciclotomice. Rezultatul a fost numit teorema Brauer–Witt şi se poate spune că majoritatea rezultatelor ulterioare legate de subgrupuri Schur depind de el. În timpul anilor 1960, subgrupul Schur a fost intens studiat de către mulţi matematicieni, care au obţinut numeroase rezultate, ca de exemplu: o descriere completă a subgrupului Schur pentru corpuri locale arbitrare şi pentru mai multe extinderi ciclotomice ale corpului numerelor raţionale, o formulă simplă pentru indexul unei algebre ciclotomice p-adice, precum şi alte proprietăţi remarcabile ale algebrelor Schur (a se vedea [27] pentru o prezentare exhaustivă şi tehnică a numeroase rezultate legate de această temă).

Monografia conţine 6 capitole, precum şi o prefaţă, notaţii, concluzii şi perspective, refefinţe bibliografice şi indice terminologic. În continuare, vom prezenta în detaliu conţinutul fiecărui capitol.

Capitolul 1 este dedicat preliminariilor, unde au fost adunate notaţii, metode şi rezultate care se folosesc pe parcursul frecvent pe parcursul capitolelor următoare.

Capitolul 2 prezintă abordarea noastră asupra descompunerii Wedderburn de algebre grupale. În prima secţiune prezentăm rezultate folositoare obţinute de către A. Olivieri, Á. del Río şi J.J. Simón [14] pentru calculul idempotenţilor centrali primitivi şi al componentelor simple ale algebrelor grupale semisimple corespunzătoare unor grupuri finite speciale, şi anume grupurile monomiale şi puternic monomiale. Aceste rezultate vor juca un rol important în continuare şi abordarea constructivă a teoremei lui Brauer-Witt o vom baza pe aceste tipuri de grupuri. A doua secţiune se concentrează în principal asupra prezentării rezultatului clasic datorat lui R. Brauer şi E. Witt, împreună cu o demonstraţie a acestuia cu reliefarea aspectului computaţional. Principalul obiectiv este găsirea unei abordări constructive a teoremei, folosind caractere puternic monomiale introduse în [14], cu scopul obţinerii unei descrieri precise a algebrelor ciclotomice care apar în teoremă. Prezentăm o demonstraţie algoritmică a teoremei Brauer–Witt folosind aşa numitele perechi puternic Shoda. Rezultatele obţinute au fost publicate în [16].

În Capitolul 3 se explică anumite aspecte ale implementării algoritmului calculului descompunerii Wedderburn a algebrelor grupale în pachetul `wedderga` pentru sistemul informatic GAP [1]. Algoritmul funcţional prezentat este mai adecvat pentru scopurile noastre computaţionale decât cel teoretic. La prezentarea acestuia, am încercat să evităm anumite aspecte tehnice ale realizării acestui soft şi ne-am concentrat mai mult asupra aspectelor matematice ale implementării strategiei alese. Această versiune a pachetului `wedderga` înnoieşte şi completează o versiune anterioară a pachetului. Noua implementare este capabilă să calculeze descompunerea Wedderburn a unei algebre semisimple FG pentru acele corpuri F care permit sistemului GAP să realizeze calcule concrete, adică corpuri numerice abeliene şi corpuri finite. Implementatea părţii noi a pachetului `wedderga` a fost realizată de către autoarea tezei în colaborare cu Á. del Río, iar baza teoretică a acestui proces este prezentată în [17].

În Capitolul 4 stabilim anumite aplicaţii ale descompunerii Wedderburn de algebre grupale în studiul algebrelor grupale de tip kleinian KG şi al grupurilor de unităţi ale inelelor grupale RG pentru R un ordin în K. Aceste algebre sunt algebre grupale raţionale, semisimple şi finit-dimensionale A, astfel încât grupul unităţilor unui ordin în A este comensurabil cu un produs direct de grupuri kleiniene. În acest capitol clasificăm algebrele Schur de tip kleinian, ca un prim pas necesar pentru caracterizarea algebrelor grupale de tip kleinian. Ca o aplicaţie a acestei clasificări, am extins mai multe rezultate legate de unităţi ale lui $\mathbb{Z}G$ la cazul unui inel grupal RG, cu R un ordin într-un corp numeric. În acest fel, am caracterizat când grupul unităţilor lui RG este finit, virtual abelian, virtual un produs direct de grupuri libere şi virtual un produs direct de grupuri libere-prin-libere. Aceste rezultate au fost publicate în [18].

În Capitolul 5 studiem grupul Schur al unui corp numeric abelian K, adică un subcorp al unei extinderi ciclotomice a corpului numerelor raţionale. Rezultatele acestui capitol au fost iniţial realizate ca şi instrumente pentru a fi aplicate în Capitolul 6, unde avem nevoie să ştim valoarea maximă a indicilor locali ai unei algebre Schur peste astfel de corpuri K. Abordarea folosită constă în considerarea separată a algebrele Schur cu indice o putere a lui p, pentru fiecare număr prim p. Cazurile cu p număr impar sau cel cu $\zeta_4 \in K$ au fost studiate de către G.J. Janusz în [9], iar cazurile rămase de către J.W. Pendergrass [20]. Pe parcursul analizării acestor rezultate şi a aplicaţiilor acestora la problema studiată în secţiunea 6.2, am descoperit că anumite rezultate ale lui Pendergrass nu sunt corecte, ca urmare a anumitor erori în calculul 2-cociclului. Aceasta ne-a condus la verificarea demonstraţiilor lui Janusz şi Pendergrass, obţinând astfel o nouă abordare care corectează erorile din [20] şi prezintă o abordare mai conceptuală a rezultatelor decât cea considerată în [9] şi [20]. Pentru a putea da această prezentare, am scufundat corpul F într-un corp ciclotomic special, mai mare decât cel considerat de către Janusz şi Pendergrass, ceea ce a permis astfel evitarea unei prezentări artificiale a rezultatelor date de ei.

În Capitolul 6 introducem noţiunea de algebră ciclică ciclotomică şi studiem anumite proprietăţi ale acesteia. O algebră ciclică ciclotomică este o algebră ciclică $(K(\zeta)/K, \sigma, \xi)$, cu ζ şi ξ rădăcini ale unităţii. În prima secţiune a Capitolului 6 arătăm că două algebre ciclice ciclotomice peste un corp numeric abelian sunt izomorfe dacă şi numai dacă au acelaşi centru, acelaşi grad şi aceeaşi listă de indici Schur locali pentru toate numerele prime. Prezentăm un exemplu care arată că acest rezultat nu poate fi extins la algebre ciclotomice arbitrare. Clasele din grupul Brauer al unui corp K ce conţin algebre ciclice ciclotomice generează un subgrup $CC(K)$ al grupului Schur $S(K)$. În multe cazuri acest subgrup este chiar grupul Schur. De exemplu, aceasta este situaţia când K este o extindere ciclotomică a corpului numerelor raţionale. Totuşi, după cum am arătat în a doua secţiune a Capitolului 6, în general $CC(K) \neq S(K)$. În acestă secţiune studiem distanţa dintre $CC(K)$ şi $S(K)$. Mai exact, caracterizăm când $CC(K)$ are indice finit în grupul Schur $S(K)$ în termeni ai poziţiilor relative ale corpului K în laticea extinderilor ciclotomice ale raţionalelor. Considerăm o suită de corpuri $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$, unde ζ este o rădăcină a unităţii pe care o precizăm cu exactitate în funcţie de K. Dacă $[S(K) : CC(K)]$ este finit sau nu, depinde de faptul că fiecare element al lui $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ satisface o anumită proprietate care poate fi relativ uşor verificată prin calcule în grupurile Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ şi $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/K)$ (a se vedea teorema 6.8). Furnizăm, de asemenea, exemple pentru a ilustra cazuri relevante. Rezultatele ultimelor două capitole au fost obţinute în colaborare cu Á. del Río şi A. Herman, şi sunt conţinute în articolele [6], [7] şi [8].

[4] Allen Herman, **Gabriela Olteanu**, Ángel del Ro, *The Schur group of an abelian number field.*

În acest articol se studiază grupul Schur al unui corp numeric abelian K, adică un subcorp al unei extinderi ciclotomice a corpului numerelor raţionale. Rezultatele acestui articol au fost iniţial gândite ca şi instrumente pentru a fi aplicate în studiul algebrelor ciclice ciclotomice, unde avem nevoie să ştim valoarea maximă a indicilor locali ai unei algebre Schur peste astfel de corpuri K, iar mai apoi s-au dovedit a fi interesante şi utile prin ele însele. Abordarea folosită constă în considerarea separată a algebrele Schur cu indice o putere a lui p, pentru fiecare număr prim p. Cazurile cu p număr impar sau cel cu $\zeta_4 \in K$ au fost studiate de către G.J. Janusz în [9], iar cazurile rămase de către J.W. Pendergrass [20]. Pe parcursul analizării acestor rezultate şi a aplicaţiilor acestora la problema studiată în secţiunea 6.2, am descoperit că anumite rezultate ale lui Pendergrass nu sunt corecte, ca urmare a anumitor erori în calculul 2-cociclului. Aceasta ne-a condus la verificarea demonstraţiilor lui Janusz şi Pendergrass, obţinând astfel o nouă abordare care corectează erorile din [20] şi prezintă o abordare mai conceptuală a rezultatelor decât cea considerată în [9] şi [20]. Pentru a putea da această prezentare, am scufundat corpul F într-un corp ciclotomic special, mai mare decât cel considerat de către Janusz şi Pendergrass, ceea ce a permis astfel evitarea unei prezentări artificiale a rezultatelor date de ei. Ca o consecinţă a teoremei Benard–Schacher, $S(K) = \bigoplus_p S(K)_p$, unde p parcurge numerele prime p cu proprietatea că corpul K conţine o p-rădăcină primitivă a unităţii ζ_p, şi $S(K)_p$ este componenta p-primară a lui $S(K)$. Mai mult, dacă A este o algebră Schur şi R_1, R_2 sunt două prime ale lui K astfel încât $R_1 \cap \mathbb{Q} = \mathbb{R}_2 \cap \mathbb{Q} = r\mathbb{Z}$, pentru r un număr prim, atunci indicii locali ai lui A în R_1 şi R_2 sunt egali, şi are sens să notăm acest indice local comun cu $m_r(A)$. Astfel, pentru a calcula indicele local maximal al unei algebre Schur cu centru K, este suficient să se calculeze $\beta_p(r)$, unde $p^{\beta_p(r)} = \max\{m_r(A) : [A] \in S(K)_p\}$, pentru fiecare număr prim p cu $\zeta_p \in K$ şi r un număr prim. Cazul $r = \infty$ este uşor şi depinde de proprietatea lui K de a fi inclus în $\mathbb{R}$ sau nu. Teorema 1 prezintă o valoare explicită pentru $\beta_p(r)$, în cazul r impar. Cazul $r = 2$ poate fi obţinut folosind rezultate ale lui Janusz.

Rezultatul principal al lucrării (Teorema 1) caracterizează $p^{\beta_p(r)}$ în termeni ai poziţiei lui K relativ la o extindere ciclotomică F a lui K, şi careeste determinată de K şi p. Formulele pentru $p^{\beta_p(r)}$ sunt formulate în termeni de elemente ale anumitor grupuri Galois considerate în acest context.

Teorema 1 *Fie K un corp numeric abelian, p un număr prim şi r un număr prim impar. Dacu a $\zeta_p \notin K$ sau $r \not\equiv 1 \mod p$ atunci $\beta_p(r) = 0$. Altfel, presupunem că $\zeta_p \in K$ şi $r \equiv 1 \mod p$, şi folosim notaţia introdusă anterior, incluzând decompunerea $\phi = \eta\rho^{j'}\sigma^j$ cu $\eta \in B$.*

1. *Presupunem că r nu divide pe m.*
   (a) *Dacă G/C nu este ciclic şi $j \not\equiv j' \mod 2$ atunci $\beta_p(r) = 1$.*
   (b) *Altfel, $\beta_p(r) = \max\{\nu(r), v_p(|\eta B^{p^{d(r)}}|)\}$, unde $d(r) = \min\{a, v_p(r-1)\}$.*
2. *Presupunem că r divide pe m şi fie q_0 un număr prime impar care nu divide pe m astfel încât $q_0 \equiv 1 \mod p^a$ şi r nu este o putere a lui p modulo q_0. Fie $\theta = \theta_{q_0}$ un generator al grupului de inerţie al G_{q_0} at r.*
   (a) *Dacă G/C nu este ciclic, $j \not\equiv j' \mod 2$ şi θ nu este un pătrat perfect în D atunci $\beta_p(r) = 1$.*
   (b) *Altfel $\beta_p(r) = \max\{\nu(r), h, v_p(|\theta^f C^{p^a}|)\}$, unde $h = \max_\Psi\{v_p(|\Psi(\theta, \eta)|)\}$ când Ψ parcurge toate ,,skew pairing" ale lui B peste $\langle\zeta_{p^a}\rangle$.*

[5] Andrei Marcus, *Indecomposable modules over group graded skew algebras*

Algebrele skew G-graduate peste un inel comutativ G-acted au fost introduse de către E. Dade ca şi un cadru de lucru care combină teoria Clufford şi teoria Galois. În acest articol se consideră module indecompozabile graduate peste astfel de algebre precum şi inelele sale de endomorfisme.

Fie G un grup, $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ un inel G-graduat (nu neapărat puternic graduat) şi fie $\mathcal{O}$ un G-inel comutativ. Presupunem că toate inelele au unitate şi că actţiunile sunt pe partea stânga. Următorul concept a fost introdus de către E. Dade [3].

Inelul G-graduat R se numeşte *algebră strâmbă (skew) G-graduată* peste $\mathcal{O}$ dacă există un omomorfism de inele care păstrează unitatea $\chi : \mathcal{O} \to R$ şi care satisface relaţia $a\chi(r) = \chi({}^g r)a \in R_g$ pentru toate elementele $r \in \mathcal{O}$, $g \in G$ şi $a \in R$.

Observăm că R_1 devine o $\mathcal{O}$-algebră deoarece χ induce un omomorfism de inele $\mathcal{O} \to Z(R_1)$ şi, mai mult decât atât, R devine un $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$-bimodul unde, prin definiţie, $ras = \chi(r)a\chi(s)$ pentru orice $r, s \in \mathcal{O}$ şi $a \in R$. Conform definiţiei, avem $ar = {}^g r \cdot a$ pentru orice $g \in G$, $r \in \mathcal{O}$ şi $a \in R_g$.

Fie R o algebra skew G-graduată peste $\mathcal{O}$, şi fie $M = \bigoplus_{x\in G} M_x$ un R-modul (stâng) G-graduat. Atunci, conform [3, Propoziţiei 4.1], M are o structură de $(\mathcal{O}, \mathcal{O})$-bimodul fixând $mr = {}^g r \cdot m$ pentru orice $g \in G$, $m \in M_g$ şi $r \in \mathcal{O}$. Atunci g-conjugatele ${}^g M$ (de asemenea notate cu $M(g)$) ale lui M coincid cu M ca şi R-modul, dar au componentele $({}^g M)_x = M_{xg}$ pentru orice $x \in G$.

Fie $r \in \mathcal{O}$, şi fie ${}^g m \in {}^g M_x$ notattţia pentru elementul $m \in M_{xg}$ privit în ${}^g M$. Atunci mr aparttţine lui M_{xg}, ${}^g(mr) \in {}^g M_x$, şi avem că ${}^g(mr) = {}^g m \cdot {}^g r$. Stabilizatorul lui M în G este, prin definiţie, subgrupul

$$G_M = \{g \in G \mid M \simeq {}^g M \text{ ca } R\text{-module } G\text{-graduate } \}$$

În sfârsit, fie $E := \mathrm{End}_R(M)^{\mathrm{op}}$, şi pentru $f, f' \in E$ şi $m \in M$, $mf = f(m)$ şi $ff' = f' \circ f$. Atunci E este un inel G-graduat astfel încât M este un (R, E)-bimodul G-graduat, iar g-componentele lui E sunt

$$E_g = \{f \in \mathrm{End}_R(M) \mid f(M_x) \subseteq M_{xg} \text{ pentru toţi } x \in G\} = \mathrm{Hom}_{R\text{-Gr}}(M, {}^g M).$$

În continuare presupunem că G este un grup finit care acţionează în inelul comutativ noetherian $\mathcal{O}$. Atunci corpul rezidual $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ este un G-corp într-un mod natural. Mai mult decât atât, presupunem că $R/J(R)$ este finit dimensional peste k. Spunem că R-modulul G-graduat M este gr-indecompozabil dacă nu este o sumă directă a două submodule graduate netriviale.

Teorema 2 *Fie M un R-modul gr-indecompozabil, liber de rang finit peste $\mathcal{O}$, şi fie $D := E/J_{\mathrm{gr}}(E)$. Atunci D este un k-skew produs încrucişat al k-algebrei de diviziune $D_1 \simeq E_1/J(E_1)$ şi G_M. Acţiunea lui G_M în k ce provine din definiţie este aceeaşi cu acţunea ce provine din structura lui R ca $\mathcal{O}$-algebră skew G-graduată.*

Corolar 1 *Fie R un $\mathcal{O}$-skew produs încrucişat, fie N un subgrup normal al lui G ce acţionează trivial în $\mathcal{O}$, şi fie U un R_N-module absolut indecompozabil (i.e. $\mathrm{End}_{R_N}/J(\mathrm{End}_{R_N}(U) \simeq k)$. Notăm cu $\bar{G} = G/N$, fie $M = R \otimes_{R_N} U$ şi fie $\bar{D} = \bar{E}/J_{gr}(\bar{E})$, unde $\bar{E} = \mathrm{End}_R(M)^{\mathrm{op}}$.*

Atunci $\bar{D}$ este k-skew product încrucişat al lui k şi $\bar{G}_M$, unde acţiunea lui $\bar{G}_M$ în k este indusă de acţiunea lui G în $\mathcal{O}$.

[6] **Andrei Marcus**, *Derived invariance of Clifford classes*

În acest articol se arată că echivalenţele Rickard G-graduate definite peste corpuri mici păstrează clasele Clifford asociate caracterelor. Aceste echivalenţe sunt compatibile cu operaţii pe clasele Clifford definite în termeni de produse încrucişate centrale simple. Clasele Clifford au fost introduse de către A. Turull în [23] ca o unealtă în studiul indicilor Schur ai caracterelor complexe de grupuri finite împreună cu teoria lor Clifford. Aceste clase apar dintr-o echivalenţă între algebre centrale simple G-acted peste un corp comutativ F, pentru G un grup finit.

Fixăm un grup finit G, un corp comutativ F de caracteristică zero, şi fie $\bar{F}$ o închidere algebrică a lui F. Fie $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ o F-algebra finit dimensionalputernic G-graduată . Notăm $A = R_1$. Notăm de asemenea cu $\mathrm{Cliff}(G, F)$ mulţimea claselor de echivalenţă a F-algebrelor centrale simple G-graduate, şi cu $[R]$ clasa lui R în $\mathrm{Cliff}(G, F)$.

Presupunem că F-algebra puternic G-graduată R este semisimplă. Notăm cu $\bar{F}R := \bar{F} \otimes_F R$. Reamintim cum asociem clase Clifford caracterelor ireductibile ale lui $\bar{F}R$.

Propoziţia 3 *Fie V un R-modul simplu, şi fie χ caracterul submodulului simplu al $\bar{F}R$-modulului $\bar{F} \otimes_F V$. Fie*

$$E := \mathrm{End}_R(R \otimes_A V)^{\mathrm{op}}.$$

Atunci E este o $F(\chi_A)$-algebră centralsimplă G-graduată, unde

$$F(\chi_A) = F(\{\chi(a) \mid a \in A\}) = F(\{\chi(a) \mid a \in A \cap Z(R)\}).$$

Cu notaţiile introduse în propoziţia anterioară, clasele Clifford $[[\chi]]$ ale χ notează clasele Clifford $[E]$ în $\mathrm{Cliff}(G, K)$, unde $K := F(\chi_A)$. Următorul rezultat ([13, Teorema 3.4]) este o generalizare a [23, Teoremei 3.5], şi studiază ce se în tâm plă când clasele Clifford a două caractere sunt egale.

Teorema 4 *Fie R şi S F-algebre puternic G-graduate, şi notăm $A = R_1$ şi $B = S_1$. Fie χ un caracter ireductibil al lui $\bar{F}R$ şi fie η un caracter ireductibil al lui $\bar{F}S$. Presupunem că $F = F(\chi_A) = F(\eta_A)$, astfel încât clasele $[[\chi]]$ şi $[[\eta]]$ aparţin lui $\mathrm{Cliff}(G, F)$.*

Presupunem că $[[\chi]] = [[\eta]]$. Atunci pentru orice subgrup H al lui G, există o izometrie între $\mathrm{Char}(\bar{F}R_H|\chi_A)$ şi $\mathrm{Char}(\bar{F}S_H|\chi_B)$. Această corespondenţă comută cu inducţia, restricţia şi G-conjugarea caracterelor, cu multiplicarea caracterelor lui $\bar{F}H$ şi cu $\mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$-conjugarea caracterelor.

Perechi corespondente de caractere au acelaşi corp al valorilor caracterelor, aceiaşi indici Schur, şi determină aceleaşi clase Clifford (şi în particular aceleaşi elemente în respectivele grupuri Brauer).

În continuare arătăm că clasele Clifford sunt invariante în raport cu echivalenţele derivate. Adoptăm un context mai general decât cel din [12]. Fie $\mathcal{K}$ o extindere finită a corpului $\mathbb{Q}_p$ al numerelor p-adice, şi fie $\mathcal{O}$ inelul întregilor lui $\mathcal{K}$.

Fixăm un grup finit G şi fie $R = \bigoplus_{g\in G} R_g$ şi $S = \bigoplus_{g\in G} S_g$ două produse încrucişate G-graduate $\mathcal{O}$-ordine. Presupunem că R şi S sunt $\mathcal{O}$-algebre simetrice, astfel încât formele simetrice ale lui R şi S sunt formele simetrice G-invariante pentru $A := R_1$ şi respectiv $B := S_1$. Notăm $\mathcal{K}R = \mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}} R$, şi presupunem că $\mathcal{K}R$ şi $\mathcal{K}S$ (sau echivalent $\mathcal{K}A$ şi $\mathcal{K}B$) sunt $\mathcal{K}$-algebras semisimple. Presupunem că există o extindere finită $\hat{\mathcal{K}}$ a lui $\mathcal{K}$ astfel încât $\hat{\mathcal{K}}$ este un corp de descompunere a lui $\hat{\mathcal{K}}R_H$ şi $\hat{\mathcal{K}}R_H$ pentru fiecare subgrup H al lui G. Fie $\hat{\mathcal{O}}$ inelul întregilor lui $\hat{\mathcal{K}}$.

Teorema 5 *Presupunem că complexul M induce o echivalenţă Rickard G-graduată între R şi S. Atunci pentru fiecare subgrup H al lui G există o izometrie între $\hat{\mathcal{K}}$-caracterele lui $\hat{\mathcal{K}}R_H$ şi $\hat{\mathcal{K}}$-caracterele lui $\hat{\mathcal{K}}S_H$. Aceste izometrii sunt compatibile cu restricţia, inducţia, G-conjugarea şi conjugarea Galois a caracterelor.*

Mai mult decât atât, caracterele corespunzătoare au clase Clifford egale (şi deci în particular, indici Schur egali şi determină acelaşi the element în grupul Brauer potrivit), şi corespondenţa caracterelor comutču inducţia şi restricţia claselor Clifford.

Fie G un grup finit, p un număr prim şi D un p-subgrup al lui G. Notăm cu $\mathrm{Irr}(G, D)$ reuniunea mulţimilor $\mathrm{Irr}(B)$ de caractere ireducibile ordinare aparţinând p-blocului B al lui G având defect grupul D. Notaţia Irr_0 înseamnă caractere de înălţime zero. Notăm de asemenea cu $\mathbb{Q}_p$ corpul numerelor p-adice, şi $\overline{\mathbb{Q}}_p$ închiderea sa algebrică. A. Turull [25] a formulat următoarea conjectură care întăreşte Conjectura B a lui Navarro [19, Section 1].

Conjectura 6 *Există o bijecţie $f : \mathrm{Irr}_0(G, D) \to \mathrm{Irr}_0(N_G(D), D)$ având următoarele proprietăţi:*

1. *Dacă $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$, şi B au defect grup D, atunci $f(\chi) \in \mathrm{Irr}_0(b)$, unde b este blocul Brauer corespondent lui $N_G(D)$ al blocului B.*
2. *f comută cu acţiunea lui $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, astfel încât, în particular, $\mathbb{Q}_p(\chi) = \mathbb{Q}_p(f(\chi))$ pentru fiecare $\chi \in \mathrm{Irr}_0(G, D)$.*
3. *Pentru fiecare $\chi \in \mathrm{Irr}_0(G, D)$, avem $m_p(f(\chi)) = m_p(\chi)$, astfel încât $f(\chi)$ şi χ au acelaşi indice Schur p-local.*

Fie $\mathcal{K}$ o extindere finită alui $\mathbb{Q}_p$, $\mathcal{O}$ inelul întreagilor în $\mathcal{K}$, şi k corpul rezidual al lui $\mathcal{O}$. Presupunem că D este un subgrup ciclic al lui G de ordin $p^a > 1$. Pentru $0 \le i \le a$, fie D_i unicul subgrup al lui D de indice p^i, şi fie $N_i = N_G(D_i)$. Fie B un bloc al lui $\mathcal{O}G$, şi fie B_i blocul lui $\mathcal{O}N_i$ corespunzător lui B. Rezultatul următor implică conjectura lui Turull în cazul blocurilor cu defect grup ciclic.

Propoziţia 7 *Blocurile B şi B_0 sunt splendid Rickard echivalente.*

Bibliografie

[1] O. Broche Cristo, A. Konovalov, A. Olivieri, G. Olteanu and Á. del Río, *Wedderga – Wedderburn Decomposition of Group Algebras, Version 4.0;* 2006 (`http://www.gap-system.org/Packages/wedderga.html`).

[2] Dade, E.C., *Clifford theory and Galois theory. I*, J. Algebra, 319 (2008), 779–799.

[3] Dicu, C, *Group graded algebras and the relative freeness of pointed groups*, Mathematica, Tome **47** (70), No 2, 151–155, 2005.

[4] Dicu, C. and Marcus, A., *Group-graded algebras and the relative projectivity of pointed groups*, The Quarterly Journal of Mathematics, **57** (3), 309–318, 2006.

[5] Dicu, C. and Marcus, A., *Source modules of blocks with normal defect groups.* Arch. Math. **88** (2007), 289-296.

[6] A. Herman, G. Olteanu and Á. del Río, *Ring isomorphism of cyclic cyclotomic algebras*, va apărea în Algebr. Represent. Theory.

[7] A. Herman, G. Olteanu and Á. del Río, *The Schur group of an abelian number field*, J. Pure Appl. Algebra, doi:10.1016/j.jpaa.2008.05.002.

[8] A. Herman, G. Olteanu and Á. del Río, *The gap between the Schur group and the subgroup generated by cyclic cyclotomic algebras*, va apărea în Israel J. Math.

[9] G.J. Janusz, *The Schur group of an algebraic number field*, Ann. of Math. **103** (1976), 253–281.

[10] MARCUS, A., *Representation Theory of Group Graded Algebras*, Nova Science Publishers, Commack, NY, 1999.

[11] MARCUS, A., *Static modules and Clifford theory for strongly graded rings*, Publ. Math. Debrecen, Tomus **42**, Fasc. 3-4, 303–314, 1993.

[12] MARCUS, A., *Twisted group algebras, normal subgroups and derived equivalences.* Algebr. Represent. Theory **4** (2001), 25–54.

[13] MARCUS, A., *Characters and equivalence classes of central simple group graded algebras.* Commun. Algebra, to appear.

[14] A. OLIVIERI, Á. DEL RÍO AND J.J. SIMÓN *On monomial characters and central idempotents of rational group algebras*, Comm. Algebra **32** (2004), 1531–1550.

[15] G. OLTEANU, *El teorema de Brauer–Witt*, Publicaciones del Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia, Número **52**, 2005.

[16] G. OLTEANU, *Computing the Wedderburn decomposition of group algebras by the Brauer–Witt theorem*, Math. Comp. **76** (2007), 1073–1087.

[17] G. OLTEANU AND Á. DEL RÍO, *An algorithm to compute the Wedderburn decomposition of semisimple group algebras implemented in the GAP package* `wedderga`, J. Symbolic Comput., acceptat.

[18] G. OLTEANU AND Á. DEL RÍO, *Group algebras of Kleinian type and groups of units*, J. Algebra (2007), **318** 2007, 856–870.

[19] NAVARRO, G., *The McKay Conjecture and Galois automorphisms.* Ann. of Math. **160** (2004), 1-12.

[20] J.W. PENDERGRASS, *The* 2*-part of the Schur Group*, J. Algebra **41** (1976), 422–438.

[21] PUIG, L., *Pointed groups and constructions of modules*, J. Algebra **116**, 7–129, 1988.

[22] RICKARD, J., *Splendid equivalences: Derived categories and permutation modules.* Proc. London Math. Soc. **72** (1996) 331–358.

[23] TURULL, A., *Clifford theory with Schur indices.* J. Algebra **170** (1994), 661–677.

[24] TURULL, A., *Reduction theorems for Clifford classes.* J. Group Theory **9** (2006), 27-47.

[25] TURULL, A., *Strengthening the McKay Conjecture to include local fields and local Schur indices.* J. Algebra. To appear.

[26] UNO, K., *Variations of conjectures on counting irreducible characters of finite groups.* in Algebraic Combinatorics, RIMS Kokyuroku 1327, 2003, 181–190.

[27] T. YAMADA, *The Schur Subgroup of the Brauer Group*, Lecture Notes in Math. **397**, Springer–Verlag, 1974.

Director de Proiect
Prof.dr. Andrei Mărcuş