Universitatea ,,Babeş-Bolyai” Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică

SINTEZA LUCRĂRILOR

GRANT PN-II-IDEI-PCE-2007-1 (Proiecte de cercetare exploratorie)

Contract nr.: 29/01.10.2007.

Cod CNCSIS: ID_532

Titlul proiectului: *ECHIVALENŢE DE CATEGORII ÎN TEORIA REPREZENTĂRILOR DE GRUPURI FINITE.*

Faza finală (unică) pe anul 2007.

În conformitate cu proiectului de cercetare aferent anului 2007 (perioada 01.10.2007 – 31.12.2007), echipa de cercetare şi concentrat activitatea asupra investigării unor categorii cu relevanţă în studiul reprezentărilor unor clase speciale de grupuri finite şi algebre finit dimensionale, în special investigarea echivalenţelor Morita şi derivate între blocuri ale grupurilor finite şi ale unor algebre asociate cu acestea.

Cercetările s-au efectuat pe două direcţii principale prezentate în detaliu în proiect, şi anume:

1) Elaborarea de metode noi provenind din teoria modulelor pentru studiul G-algebrelor si al grupurilor punctate.
2) Dezvoltarea de noi metode computaţionale pentru studiul indicilor Schur ai caracterelor şi de metode teoretice in cazul reprezentărilor peste corpuri arbitrare.

Rezutatele obţinute până acum pe direcţia 2) au fost intai comunicate la seminarul stiintific aferent proiectului, precum si pe plan international, de catre A. Marcus, in cadrul seminariilor de cercetare organizate de echipe de algebristi din alte universitati astfel:
1. Conferinţa ,, Crossed products, Brauer groups and Clifford classes” la Vrije Universiteit Brussel, in 19.10.2007.
2. Conferinţa ,, Derived invariance of Clifford classes”, la Leibniz Universitat Hannover, Germania.
Se preconizeaza redactarea trimiterea spre publicare a articolelor la începutul lui 2008.

În conformitate cu criteriile de performanţă preconizate pentru acest an, o rezultatele obţinute pe direcţia 1) s-au concretizat în redactarea lucrării [1] descrise mai jos.

[1] C. Dicu, *On the multiplicity module of a pointed group*, 2007 (este acceptat pt. publicare in revista Mathematica (indexată BDI)).

Rezultatele articolului [1] se încadrează în domeniul reprezentărilor modulare ale grupurilor finite. Dezvoltăm şi aplicăm sistematic metodele teoriei modulelor la studiul asa numitelor grupuri punctate, mai precis, dăm o abordare in termeni modul-teoretici a noţiunii de modul de multiplicitate al unui grup punctat al unei G-algebre, folosind tehnici din teoria algebrelor graduate.

Fixăm G un grup finit şi $\mathcal{O}$ un inel comutativ, noetherian, local şi complet având corpul rezidual k de caracteristică p (nu neaparat algebric închis). Toate algebrele şi modulele vor fi considerate libere peste $\mathcal{O}$ şi de rang finit. Fie A o G-algebră peste $\mathcal{O}$. Amintim că un grup punctat H_α pe A este o pereche (H, α), unde H este un subgrup al lui G şi $\alpha \in \mathcal{P}(A^H)$ este un punct al lui A^H.

Unui grup punctat H_α al lui A i se asociază diverse obiecte matematice pe care le vom descrie pe scurt în continuare, urmând [6, Secţiunea 13]. În primul rând, există un unic ideal maximal m_α al lui A^H astfel încât $\alpha \subsetneq m_\alpha$ şi k-algebra simplă $S(\alpha) = A^H/m_\alpha$ se numeşte algebra de multiplicitate a grupului punctat H_α. Fie $N_G(H_\alpha)$ stabilizatorul lui α în $N_G(H)$ şi notăm $\bar{N}_G(H_\alpha) = N_G(H_\alpha)/H$. Grupul $N_G(H_\alpha)$ acţionează asupra algebrei cât A^H/m_α şi deci $S(\alpha)$ este o $N_G(H_\alpha)$-algebră. Mai mult, deoarece H acţionează trivial asupra lui A^H, este util să privim $S(\alpha)$ ca şi $\bar{N}_G(H_\alpha)$-algebră.

Dacă k este algebric închis, atunci $S(\alpha) = \mathrm{End}_k(V(\alpha))$, unde $V(\alpha)$ este unicul $S(\alpha)$-modul simplu. Acest modul simplu se numeşte modulul de multiplicitate al lui H_α. De fapt, $V(\alpha)$ poate fi înzestrat cu o structură de modul peste o algebră răsucită $k_\sharp\hat{\bar{N}}_G(H_\alpha)$ asociată lui $S(\alpha)$. Prin modul de multiplicitate $V(\alpha)$ al unui grup punctat H_α, vom înţelege întotdeauna k-spaţiul vectorial $V(\alpha)$ împreună cu structura sa de $k_\sharp\hat{\bar{N}}_G(H_\alpha)$-modul.

Folosind bijecţia stabilită în [1, Propoziţia 2.4] putem interpreta un grup punctat H_α al lui A ca şi o clasă de izomorfism de R_H-sumanzi direcţi indecompozabili ai lui A, unde $R = A * G$ este algebra grupală strâmbă a lui A şi G. Mai exact, modulul indecompozabil corespunzător grupului punctat H_α este $A * H$-modulul Ai, unde $i \in \alpha$. Această corespondenţă permite interpretarea în termeni modul-teoretici a unor rezultate din teoria G-algebrelor referitoare la grupuri punctate (a se vedea de exemplu [1] şi [2]).

În acest articol dăm versiunea graduată a noţiunii de modul de multiplicitate şi algebră de multiplicitate a unui grup punctat. Vom începe cu o algebră tare G-graduată R, un R-modul $\tilde{M}$ şi U un sumand direct al lui $\mathrm{Res}^G_H(\tilde{M})$. Aşa cum am precizat la început vom considera cazul general, când k nu este neaparat algebric închis. Vom defini noţiunea de modul de multiplicitate al lui U. Vom arăta că această construcţie aplicată algebrei G-graduate $A*G$ implică în cazul algebric închis, noţiunea uzuală de modul de multiplicitate al unui grup punctat.

Abordarea noastră foloseşte tehnici din teoria algebrelor graduate (prezentate în [3] şi [4]), în principal legate de teorie Clifford pentru module indecompozabile peste algebre tare graduate (prezentate în [3]).

Fie R o $\mathcal{O}$-algebră tare G-graduată şi H un subgrup al lui G. Fie $\tilde{M}$ un R-modul şi notăm

$$A = \mathrm{End}_{R_1}(\tilde{M})^{\mathrm{op}}.$$

Este binecunoscut faptul că A este o G-algebră şi că

$$A^H = \mathrm{End}_{R_H}(\tilde{M})^{\mathrm{op}}.$$

Mai mult, A^H devine o $N_G(H)$-algebră asupra căreia H acţionează trivial şi vom privi A^H ca şi $\bar{N}_G(H)$-algebră, unde $\bar{N}_G(H) := N_G(H)/H$.

Fie U un sumand direct indecompozabil al lui $\mathrm{Res}^G_H \tilde{M}$. Privim $R_{N_G(H)}$ ca şi algebră $\bar{N}_G(H)$-graduată (cu 1-componenta R_H). Atunci

$$M := R_{N_G(H)} \otimes_{R_H} U$$

este un $R_{N_G(H)}$-modul $\bar{N}_G(H)$-graduat. Notăm cu $\bar{N}_G(H)_M$ stabilizatorul lui M, adică

$$\bar{N}_G(H)_M = \bar{N}_G(H)_U = \{gH \in \bar{N}_G(H) \mid R_{gH} \otimes_{R_H} U \simeq U \text{ în } R_H\text{-mod}\}.$$

Deoarece $\tilde{M}$ este un R-modul, deci în particular un $R_{\bar{N}_G(H)}$-modul, există un binecunoscut izomorfism de $\mathcal{O}$-algebre $\bar{N}_G(H)$-graduate

$$\mathrm{End}_{R_{\bar{N}_G(H)}}(R_{\bar{N}_G(H)} \otimes_{R_H} \tilde{M})^{\mathrm{op}} \simeq A^H * \bar{N}_G(H),$$

unde $A^H * \bar{N}_G(H)$ este algebra grupală strâmbă a lui $A^H = \mathrm{End}_{R_H}(\tilde{M})^{\mathrm{op}}$ şi $\bar{N}_G(H)$. Mai târziu vom aplica teorie Clifford algebrei $\bar{N}_G(H)$-graduate $A^H * \bar{N}_G(H)$ şi 1-componentei sale A^H.

R_H-modulul U determină un unic A^H-modul proiectiv indecompozabil X şi X la rândul său, corespunde (aplicând [3, Teorema 2.3.10]) unui A^H-modul

$$\bar{X} := X/J(A^H)X,$$

care este simplu ca şi A^H(şi ca $A^H/J(A^H)$)-modul. Mai mult, deoarece aceste corespondenţe sunt compatibile cu acţiunile grupurilor, avem egalitatea între stabilizatorii

$$\bar{N}_G(H)_U = \bar{N}_G(H)_X = \bar{N}_G(H)_{\bar{X}}.$$

Considerăm acum algebrele $\bar{N}_G(H)$-graduate

$$E := \mathrm{End}_{R_{N_G(H)}}(R_{N_G(H)} \otimes_{R_H} U)^{\mathrm{op}},$$

care este produs încrucişat al lui $E_1 \simeq \mathrm{End}_{R_H}(U)^{\mathrm{op}}$ şi $\bar{N}_G(H)_U$, şi

$$D := E/J_{\mathrm{gr}}(E),$$

care este produs încrucişat al lui $D_1 \simeq E_1/J(E_1)$ şi $\bar{N}_G(H)_U$. Deoarece corespondenţa

$$R_{N_G(H)} \otimes_{R_H} U \mapsto (A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} X$$

provine dintr-o echivalenţă de categorii, are loc izomorfismul

$$E \simeq \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} X)^{\mathrm{op}}$$

de algebre $\bar{N}_G(H)$-graduate. Mai mult, X fiind proiectiv ca şi A^H-modul, are loc izomorfismul de k-algebre $\bar{N}_G(H)$-graduate

$$D \simeq \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)_X}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} \bar{X})^{\mathrm{op}}.$$

Se observă că, k-algebra din membrul drept este izomorfă cu un produs încrucişat al lui

$$D_1 \simeq \mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{End}_{A^H/J(A^H)}(X)^{\mathrm{op}}$$

cu $\bar{N}_G(H)_X$.

Avem că $\bar{X}$ este un $(A^H, \mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})^{\mathrm{op}})$-bimodul şi deoarece $\bar{X}$ este un A^H-modul $\bar{N}_G(H)_X$-invariant, rezultă că

$$(A^H * \bar{N}_G(H)_X) \otimes_{A^H} \bar{X} \simeq \bar{X} \otimes_{\mathrm{End}_{A^H}(\bar{X})^{\mathrm{op}}} \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)_X}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} \bar{X})^{\mathrm{op}}$$

este un $(A^H * \bar{N}_G(H)_X, \mathrm{End}_{A^H * \bar{N}_G(H)_X}((A^H * \bar{N}_G(H)) \otimes_{A^H} \bar{X}))$-bimodul $\bar{N}_G(H)_X$-graduat.

Deoarece $\bar{X}$ este un A^H-modul simplu, avem că $J(A^H) \subseteq \mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X})$ şi mai mult, $\mathrm{Ann}_{A^H}(\bar{X})$ este un ideal $\bar{N}_G(H)_X$-invariant al lui $A^H * \bar{N}_G(H)_X$. Acest ideal determină un unic ideal graduat al lui $A^H * \bar{N}_G(H)_X$. Atunci $(A^H * \bar{N}_G(H)_X) \otimes_{A^H} \bar{X}$ este simplu graduat ca şi $A^H * \bar{N}_G(H)_X$-modul, şi considerăm k-algebra $\bar{N}_G(H)_X$-graduată

$$\hat{R} := A^H * \bar{N}_G(H)_X / \operatorname{Ann}_{A^H}(\bar{X})(A^H * \bar{N}_G(H)_X).$$

Se observă că

$$\hat{R} \simeq (A^H / \operatorname{Ann}_{A^H}(\bar{X})) * \bar{N}_G(H)_U$$

este o algebră tare $\bar{N}_G(H)_U$-graduată cu 1-componenta

$$\hat{R}_1 \simeq A^H / \operatorname{Ann}_{A^H}(\bar{X}),$$

o k-algebră simplă. Notăm

$$\hat{E} := \operatorname{End}_{\hat{R}}(\hat{R} \otimes_{\hat{R}_1} \bar{X})^{\mathrm{op}}$$

(deci $\hat{E} \simeq D$ ca şi algebre $\bar{N}_G(H)_U$-graduate). Are loc următorul izomorfism de $(\hat{R}, \hat{E})$-bimodule $\bar{N}_G(H)_U$-graduate:

$$\hat{R} \otimes_{\hat{R}_1} \bar{X} \simeq \bar{X} \otimes_{\hat{E}_1} \hat{E}.$$

Prin urmare $\bar{X}$ este un $\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})$-modul, unde $\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})$ este subalgebra diagonală a lui $\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}$, şi avem

$$\hat{R} \otimes_{\hat{R}_1} \bar{X} \simeq (\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}) \otimes_{\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})} \bar{X},$$

ca şi $(\hat{R}, \hat{E})$-bimodule.

Putem acum să dăm definiţia modulului de multiplicitate al R_H-modulului indecompozabil U.

Definiţia 1 $\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}})$-*modulul* $\bar{X}$ *se numeşte modulul de multiplicitate al* R_H-*sumandului indecompozabil* U *al lui* $\tilde{M}$.

Studiem în continuare un caz particular al acestei construcţii, şi anume cazul când $\hat{E}_1 \simeq k$. Această situaţie are loc de exemplu când k este algebric închis, deoarece $\bar{X}$ este o A^H-algebră simplă şi deci $\hat{E}_1 \simeq \operatorname{End}_{A^H}(\bar{X})$ este izomorf cu k.

Propoziţia 1 *Presupunem că* $\hat{E}_1 \simeq k$ *şi deci* $\hat{R}_1$ *este o* k*-algebră simplă centrală. Atunci*

$$\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}) \simeq \hat{R}_1 \otimes_k k_\gamma \bar{N}_G(H)_U,$$

unde $\gamma \in Z^2(\bar{N}_G(H)_U, k^*)$.

În următoarea propoziţie arătăm că noţiunea uzuală de modul de multiplicitate al unui grup punctat este un caz particular al noţiunii de modul de multiplicitate al unui modul indecompozabil, definită mai sus.

Propoziţia 2 *Presupunem* k *este algebric închis şi fie* A *o* G*-algebră peste* $\mathcal{O}$. *Notăm cu* $R = A * G$ *algebra grupală strâmbă a lui* A *şi* G, *şi îl privim pe* A *ca şi* R*-modul. Fie* H_α *un grup punctat al lui* A *şi* Ai $(i \in \alpha)$ R_H*-sumandul direct indecompozabil al lui* A *corespunzător lui* H_α. *Atunci modulul de multiplicitate al lui* Ai *(în sensul Definiţiei 1) este modulul de multiplicitate al grupului punctat* H_α.

Pentru demonstraţia Propoziţiei 2 se aplică construcţia de mai sus pentru $A * G$ în loc de R, A în loc de $\tilde{M}$ şi Ai în loc de U. Avem că $A \simeq \operatorname{End}_{R_1}(A)^{\mathrm{op}}$ şi $A^H \simeq \operatorname{End}_{R_H}(A)^{\mathrm{op}}$. Atunci $\bar{N}_G(H)_U$ este $N_G(H_\alpha)$, stabilizatorul lui H în α, k-algebra simplă $\hat{R}_1$ este $S(\alpha)$, algebra de multiplicitate a lui H_α şi $\bar{X}$ este $V(\alpha)$, modulul de multiplicitate al lui H_α. Deoarece suntem în situaţia Propoziţiei 1,

$$\Delta(\hat{R} \otimes_k \hat{E}^{\mathrm{op}}) \simeq S(\alpha) \otimes_k k_\gamma \bar{N}_G(H_\gamma),$$

unde $\gamma \in Z^2(\bar{N}_G(H_\alpha), k^*)$, şi deci propoziţia este demonstrată.

References

[1] Dicu, C. and Marcus, A., *Group-graded algebras and the relative projectivity of pointed groups*, The Quarterly Journal of Mathematics, **57** (3), 309–318, 2006.

[2] Dicu, C, *Group graded algebras and the relative freeness of pointed groups*, Mathematica, Tome **47** (70), No 2, 151–155, 2005.

[3] Marcus, A., *Representation Theory of Group Graded Algebras*, Nova Science Publishers, Commack, NY, 1999.

[4] Năstasescu, C. and Van Ostaeyen, F., *Graded ring theory*, North Holland, Amsterdam, 1982.

[5] Puig, L., *Pointed groups and constructions of modules*, J. Algebra **116**, 7–129, 1988.

[6] Thévenaz, J., *G-algebras and Modular Representation Theory*, Oxford Science Publication, The Clarendon Press, Oxford University Press, New-York, 1995.

Director de Proiect
Prof.dr. Andrei Mărcuş