

ECHIVALENȚE DE CATEGORII ÎN TEORIA REPREZENTĂRILOR DE GRUPURI FINITE

Andrei Marcus

Babeș-Bolyai University
Faculty of Mathematics and Computer Science

Proiect ID_532, nr. contract: 29/28.09.2007
CNCSIS, 29.10.2009

- 1 Rezumatul proiectului
- 2 Echipa de cercetare
- 3 Indicatori de performanță
- 4 Rezultate
- 5 Alte publicații
- 6 Implicarea tinerilor cercetători
- 7 Dificultăți întâmpinate

Rezumatul proiectului

- Tematica acestui proiect se refera la grupuri finite si reprezentarile lor modulare si proiective, echivalente derivate intre blocuri ale algebrelor grupale, blocuri ale subgrupurilor normale, teorie Clifford, blocuri nilpotente, algebra hiperfocala a unui bloc.
- Domeniul propus este foarte intens cercetat pe plan international si are multiple ramificatii si aplicatii. Ne propunem o imbinare a metodelor clasice cu metode noi. Ne inscriem in obiectivele generale de abordare ale unor subiecte moderne, de integrare in comunitatea stiintifica internationala si de formare a cercetatorilor tineri.
- Directii principale de investigare (teoretice si computationale): investigarea din punct de vedere categorial a invariantilor din teoria Clifford legati de conjecturile lui Alperin-Dade-Isaacs-Navarro-Uno, echivalente intre categorii Brauer, invarianta corespondentei Harris-Knoerr la echivalente derivate, algebra hiperfocala a unei extensii de blocuri, obtinerea de echivalente Rickard din isometrii perfecte si izotipii de caractere, reducerea conjecturii Donovan la cazul grupurilor quasisimple, calculul coomologiei de blocuri, calcul de indici Schur.

- Prof. univ. dr. Andrei Mărcuș, director de proiect
- Lector univ. dr. Gabriela Olteanu, cercetator (doctorat susținut în decembrie 2007, Univ. Murcia)
- Asistent univ. dr. Camelia Dicu, cercetator (doctorat susținut în februarie 2008, UBB), a părăsit echipa în septembrie 2008
- Asist. drd. Constantin Cosmin Todea (drd. din 2007; referatele de doctorat susținute)
- Asist. drd. Tiberiu Coconeț (drd. din 2005; referatele de doctorat susținute)

Indicatori de performanță

An	Nr articole ISI acceptate	Realizat	Nr articole BDI acceptate	Realizat
2007	0	0	1	1
2008	1	2	1	1
2009	2	3	1	2
2010	2		1	
Total	5		4	

Camelia Dicu, *On the multiplicity module of a pointed group*,
Mathematica (Cluj), 50 (73), No.1 (2008), 31–37.

În acest articol se dă versiunea graduată a noțiunii de modul de multiplicitate și algebră de multiplicitate a unui grup punctat. Se începe cu o algebră tare G -graduată R , un R -modul \tilde{M} și U un sumand direct al lui $\text{Res}_H^G(\tilde{M})$. Se consideră cazul general, când k nu este neaparat algebric închis. Se definește noțiunea de modul de multiplicitate al lui U . Se arată că această construcție aplicată algebrei G -graduate $A * G$ implică în cazul algebric închis, noțiunea uzuală de modul de multiplicitate al unui grup punctat.

Abordarea folosește tehnici din teoria algebrelor graduate, în principal legate de teorie Clifford pentru module indecompozabile peste algebre tare graduate.

Allen Herman, **Gabriela Olteanu**, Ángel del Río, *The Schur group of an abelian number field*, J. Pure Appl. Algebra 213 (2009), 22–33.

Se studiază grupul Schur al unui corp numeric abelian K , adică un subcorp al unei extinderi ciclotomice a corpului numerelor raționale. Rezultatele au fost gândite ca și instrumente pentru a fi aplicate în studiul algebrelor ciclice ciclotomice, unde avem nevoie să știm valoarea maximă a indicilor locali ai unei algebre Schur peste astfel de corpuri K , iar apoi s-au dovedit a fi utile prin ele însele.

Pentru a calcula indicele local maximal al unei algebre Schur cu centru K , este suficient să se calculeze $\beta_p(r)$, unde

$$p^{\beta_p(r)} = \max\{m_r(A) : [A] \in S(K)_p\},$$

pentru fiecare număr prim p cu $\zeta_p \in K$ și r un număr prim.

Cazul $r = \infty$ este ușor și depinde de proprietatea lui K de a fi inclus în \mathbb{R} sau nu.

Cazul $r = 2$ poate fi obținut folosind rezultate ale lui Janusz.

Rezultatul principal prezintă o valoare explicită pentru $\beta_p(r)$, r impar.

Rezultatul principal caracterizează $p^{\beta_p(r)}$ în termeni ai poziției lui K relativ la o extindere ciclotomică F a lui K (determinată de K și p).

Theorem

Fie K un corp numeric abelian, p un număr prim și r un număr prim impar. Dacă $\zeta_p \notin K$ sau $r \not\equiv 1 \pmod{p}$ atunci $\beta_p(r) = 0$. Altfel, presupunem că $\zeta_p \in K$ și $r \equiv 1 \pmod{p}$, și folosim notația introdusă anterior, incluzând decompunerea $\phi = \eta\rho^{j'}\sigma^j$ cu $\eta \in B$.

- ① Presupunem că r nu divide pe m .
 - ① Dacă G/C nu este ciclic și $j \not\equiv j' \pmod{2}$ atunci $\beta_p(r) = 1$.
 - ② Altfel, $\beta_p(r) = \max\{\nu(r), v_p(|\eta B^{p^{d(r)}}|)\}$, unde $d(r) = \min\{a, v_p(r-1)\}$.
- ② Presupunem că r divide pe m și fie q_0 un număr prime impar care nu divide pe m astfel încât $q_0 \equiv 1 \pmod{p^a}$ și r nu este o putere a lui p modulo q_0 . Fie $\theta = \theta_{q_0}$ generator al grupului de inerție al G_{q_0} în r .
 - ① Dacă G/C nu este ciclic, $j \not\equiv j' \pmod{2}$ și θ nu este un pătrat perfect în D atunci $\beta_p(r) = 1$.
 - ② Altfel $\beta_p(r) = \max\{\nu(r), h, v_p(|\theta^f C^{p^a}|)\}$, unde $h = \max_{\psi}\{v_p(|\Psi(\theta, \eta)|)\}$ când Ψ parcurge toate „skew pairing” ale lui B peste $\langle \zeta_{p^a} \rangle$.

Septimiu Crivei, **Gabriela Olteanu**, *GAP algorithms for finite abelian groups and applications*, Carpathian J. Math. 24 (2008), no. 3, 310–316.

În acest articol se studiază și se propun algoritmi GAP care determină grupuri abeliene finite sau subgrupuri ale lor având anumite proprietăți de natură laticială. Folosind exemplele și algoritmi prezentați în lucrare am demonstrat următoarea teoremă de structură pentru UC- p -grupuri finite abeliene.

Teoremă. Un p -grup finit abelian G este un UC-grup dacă și numai dacă G este ori semisimplu ori uniform (adică, ori $G \cong \mathbb{Z}_p^l$ ori $G \cong \mathbb{Z}_{p^k}$ cu $l, k \geq 1$ numere naturale).

Principalul rezultat teoretic obținut prezintă o descriere a subgrupurilor tip ale unui grup abelian.

Teoremă. Un subgrup al grupului G este un subgrup tip dacă și numai dacă este un subgrup Hall.

Allen Herman, **Gabriela Olteanu**, Ángel del Río,
The gap between the Schur group and the subgroup generated by cyclic cyclotomic algebras,
va apărea in Israel J. Math.

Fie K o extindere abeliană a corpului numerelor raționale. Fie $S(K)$ grupul Schur al lui K și fie $CC(K)$ subgrupul lui $S(K)$ generat de clasele de echivalența Brauer conținând algebre ciclice ciclotomice. În acest articol se caracterizează când $CC(K)$ are indice finit în $S(K)$ în termeni ai pozițiilor relative ale lui K în laticia extinderilor ciclotomice ale corpului numerelor raționale. Scopul este să se studieze distanța dintre grupul $S(K)$ și grupul $CC(K)$, ambele privite ca subgrupuri în grupul Brauer $\text{Br}(K)$, în termeni ai pozițiilor și structurii corpului de bază K .

Andrei Marcus, *Indecomposable modules over group graded skew algebras*, *Mathematica (Cluj)*, 50 (73), No.2 (2008), 191–195.

Fie G un grup finit care acționează în inelul comutativ noetherian \mathcal{O} . Atunci corpul rezidual $k = \mathcal{O}/J(\mathcal{O})$ este un G -corp într-un mod natural. Presupunem că $R/J(R)$ este finit dimensional peste k .

Theorem

Fie M un R -modul gr -indecompozabil, liber de rang finit peste \mathcal{O} , fie $E := \text{End}_R(M)^{\text{op}}$, și fie $D := E/J_{\text{gr}}(E)$. Atunci D este un k -skew produs încrucișat al k -algebrei de diviziune $D_1 \simeq E_1/J(E_1)$ și G_M . Acțiunea lui G_M în k ce provine din definiție este aceeași cu acțiunea ce provine din structura lui R ca \mathcal{O} -algebră skew G -graduată.

Corolar. Fie R un \mathcal{O} -skew produs încrucișat, fie N un subgrup normal al lui G ce acționează trivial în \mathcal{O} , și fie U un R_N -module absolut indecompozabil. Notăm cu $\bar{G} = G/N$, fie $M = R \otimes_{R_N} U$ și fie $\bar{D} = \bar{E}/J_{\text{gr}}(\bar{E})$, unde $\bar{E} = \text{End}_R(M)^{\text{op}}$.

Atunci \bar{D} este k -skew product încrucișat al lui k și \bar{G}_M , unde acțiunea lui \bar{G}_M în k este indusă de acțiunea lui G în \mathcal{O} .

Andrei Marcus, *Derived invariance of Clifford classes*, Journal of Group Theory, 12 (2009), 83–94.

Se arată că echivalențele Rickard G -graduate definite peste corpuri mici păstrează clasele Clifford asociate caracterelor.

Aceste echivalențe sunt compatibile cu operații pe clasele Clifford definite în termeni de produse încrucișate centrale simple.

Clasele Clifford au fost introduse de către A. Turull (1994) ca o unealtă în studiul indicilor Schur ai caracterelor complexe de grupuri finite împreună cu teoria lor Clifford.

- Fixăm un grup finit G , un corp comutativ F de caracteristică zero, și fie \bar{F} o închidere algebrică a lui F .
- Fie $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ o F -algebra finit dimensională puternic G -graduată. Notăm $A = R_1$.
- Notăm $\text{Cliff}(G, F)$ mulțimea claselor de echivalență a F -algebrelor centrale simple G -graduate;
- fie $[R]$ clasa lui R în $\text{Cliff}(G, F)$.

Presupunem că F -algebra tare G -graduată R este semisimplă. Notăm cu $\bar{F}R := \bar{F} \otimes_F R$.

Reamintim cum asociem clase Clifford caracterelor ireductibile ale lui $\bar{F}R$.

Proposition

Fie V un R -modul simplu, și fie χ caracterul submodulului simplu al $\bar{F}R$ -modulului $\bar{F} \otimes_F V$. Fie

$$E := \text{End}_R(R \otimes_A V)^{\text{op}}.$$

Atunci E este o $F(\chi_A)$ -algebră centrală simplă G -graduată, unde

$$F(\chi_A) = F(\{\chi(a) \mid a \in A\}) = F(\{\chi(a) \mid a \in A \cap Z(R)\}).$$

Clasa Clifford $[[\chi]]$ a lui χ notează clasa Clifford $[E]$ în $\text{Cliff}(G, K)$, unde $K := F(\chi_A)$.

Următorul rezultat (Marcus 2007) studiază ce se întâmplă când clasele Clifford a două caractere sunt egale.

Theorem

Fie R și S F -algebre tare G -graduate, și notăm $A = R_1$ și $B = S_1$. Fie χ un caracter ireductibil al lui $\bar{F}R$ și fie η un caracter ireductibil al lui $\bar{F}S$. Presupunem că $F = F(\chi_A) = F(\eta_A)$, astfel încât clasele $[[\chi]]$ și $[[\eta]]$ aparțin lui $\text{Cliff}(G, F)$.

Presupunem că $[[\chi]] = [[\eta]]$.

- 1 Atunci pentru orice subgrup H al lui G , există o izometrie între $\text{Char}(\bar{F}R_H|\chi_A)$ și $\text{Char}(\bar{F}S_H|\chi_B)$.
- 2 Această corespondență comută cu inducția, restricția și G -conjugarea caracterelor, cu multiplicarea caracterelor lui $\bar{F}H$ și cu $\text{Gal}(\bar{F}/F)$ -conjugarea caracterelor.
- 3 Perechi corespondente de caractere au același corp al valorilor caracterelor, aceiași indici Schur, și determină aceleași clase Clifford (și în particular aceleași elemente în respectivele grupuri Brauer).

Articol 6

Arătăm că clasele Clifford sunt invariante în raport cu echivalențele derivate. Fie \mathcal{K} o extindere finită a lui \mathbb{Q}_p , și \mathcal{O} inelul întregilor lui \mathcal{K} . Fixăm un grup finit G și fie $R = \bigoplus_{g \in G} R_g$ și $S = \bigoplus_{g \in G} S_g$ două produse încrucișate G -graduate \mathcal{O} -ordine. Presupunem că

- R și S sunt \mathcal{O} -algebre G -graduate simetrice;
- $\mathcal{K}R$ și $\mathcal{K}S$ (sau echivalent $\mathcal{K}A$ și $\mathcal{K}B$) sunt \mathcal{K} -algebras semisimple.
- există o extindere finită $\hat{\mathcal{K}}$ a lui \mathcal{K} astfel încât $\hat{\mathcal{K}}$ este un corp de descompunere a lui $\hat{\mathcal{K}}R_H$ și $\hat{\mathcal{K}}S_H$ pentru fiecare subgrup H al lui G . Fie $\hat{\mathcal{O}}$ inelul întregilor lui $\hat{\mathcal{K}}$.

Theorem

Presupunem că complexul M induce o echivalență Rickard G -graduată între R și S . Atunci pentru fiecare subgrup H al lui G există o izometrie între $\hat{\mathcal{K}}$ -caracterele lui $\hat{\mathcal{K}}R_H$ și $\hat{\mathcal{K}}$ -caracterele lui $\hat{\mathcal{K}}S_H$. Aceste izometrii sunt compatibile cu restricția, inducția, G -conjugarea și conjugarea Galois a caracterelor.

Mai mult, caracterele corespunzătoare au clase Clifford egale, și corespondența caracterelor comută cu inducția și restricția claselor Clifford.

Fie G un grup finit, p un număr prim și D un p -subgrup al lui G . Notăm cu $\text{Irr}(G, D)$ reuniunea mulțimilor $\text{Irr}(B)$ de caractere ireducibile ordinare aparținând p -blocului B al lui G având defect grupul D . Notăția Irr_0 înseamnă caractere de înălțime zero. Notăm de asemenea cu \mathbb{Q}_p corpul numerelor p -adice, și $\overline{\mathbb{Q}}_p$ închiderea sa algebrică.

Conjectura (A. Turull (2006))

Există o bijecție $f : \text{Irr}_0(G, D) \rightarrow \text{Irr}_0(N_G(D), D)$ având următoarele proprietăți:

- 1 *Dacă $\chi \in \text{Irr}_0(B)$, și B au defect grup D , atunci $f(\chi) \in \text{Irr}_0(b)$, unde b este blocul Brauer corespondent lui $N_G(D)$ al blocului B .*
- 2 *f comută cu acțiunea lui $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$, astfel încât, în particular, $\mathbb{Q}_p(\chi) = \mathbb{Q}_p(f(\chi))$ pentru fiecare $\chi \in \text{Irr}_0(G, D)$.*
- 3 *Pentru fiecare $\chi \in \text{Irr}_0(G, D)$, avem $m_p(f(\chi)) = m_p(\chi)$, astfel încât $f(\chi)$ și χ au același indice Schur p -local.*

- Fie \mathcal{K} o extindere finită alui \mathbb{Q}_p , \mathcal{O} inelul întregilor în \mathcal{K} , și k corpul rezidual al lui \mathcal{O} .
- Presupunem că D este un subgrup ciclic al lui G de ordin $p^a > 1$.
- Pentru $0 \leq i \leq a$, fie D_i unicul subgrup al lui D de indice p^i , și fie $N_i = N_G(D_i)$.
- Fie B un bloc al lui $\mathcal{O}G$, și fie B_i blocul lui $\mathcal{O}N_i$ corespunzător lui B .

Rezultatul următor implică conjectura lui Turull în cazul blocurilor cu defect grup ciclic.

Proposition

Categoriile de complexe modulo omotopie ale blocurilor B și B_0 sunt Rickard echivalente (echivalență Rickard).

Stefaan Caenepeel, **Andrei Marcus**, *Hopf-Galois extensions and an exact sequence for H -Picard groups*, va apărea în Journal of Algebra.

Scopul acestui articol este următoarea generalizare a unui rezultat al lui M. Beattie și Á. del Río.

Teoremă. Fie H o algebră Hopf cocomutativă peste corpul k . Fie A o extindere H -Galois fidelă și plată. Atunci există un și exact

$$1 \rightarrow H^1(H, Z(A^{\text{co}H})) \xrightarrow{g_1} \text{Pic}^H(A) \xrightarrow{g_2} \text{Pic}(A^{\text{co}H})^H \xrightarrow{g_3} H^2(H, Z(A^{\text{co}H})).$$

Aici $H^*(H, Z(A^{\text{co}H}))$ sunt grupurile de cohomologie Sweedler, $\text{Pic}(A^{\text{co}H})^H$ este grupul elementelor H -invariante ale $\text{Pic}(A^{\text{co}H})$ și $\text{Pic}^H(A)$ este grupul claselor de izomorfism ale bimodulelor Hopf relative inversabile. Mai mult, g_1 și g_2 sunt omomorfisme de grupuri, în timp ce g_3 nu este. Se prezintă o interpretare interesantă a teoremei anterioare în termeni ai extensibilității Clifford la A a $A^{\text{co}H}$ -modulelor.

Constantin Cosmin Todea, *Remarks on generalized Brauer pairs*, va apărea în *Mathematica (Cluj)*.

Fie k un corp algebric închis de caracteristică p , G un grup finit, N un subgrup normal al lui G și c un bloc G -stabil al lui kN . Introducem *perechi Brauer generalizate* numite perechi (c, G) -Brauer și notate cu (Q, e_Q) , unde Q este un p -subgroup al lui G și e_Q este un bloc al lui $kC_N(Q)$. Dacă $G = N$, perechile Brauer generalizate devin perechile c -Brauer uzuale. Dacă (P, e_P) este o pereche maximală (c, G) -Brauer, se demonstrează că e_P este un bloc nilpotent. Se arată de asemenea următoarea generalizare a celei de-a treia teoreme a lui Brauer.

Theorem

Fie c blocul principal al lui kN , unde $N \trianglelefteq G$ și $Q \leq G$ un p -subgroup.

- Blocul principal c este G -stabil.
- $\text{Br}_Q^N(c)$ este blocul principal block al lui $kC_N(Q)$.
- (Q, e) este o pereche (c, G) -Brauer dacă și numai dacă e este blocul principal al lui $kC_N(Q)$.
- Grupurile (c, G) -defect ale lui c sunt p -subgrupurile Sylow ale lui G .

Tiberiu Coconet, *Remarks on induction of G -algebras and skew group algebras*, va apărea în *Mathematica (Cluj)*.

Se dă o versiune în termeni ai grupurilor punctate a unui rezultat al lui Dade despre teoria Green. Legat de aceasta, se consideră o H -algebră B , unde H este un subgrup al grupului finit G . Pentru algebra grupala skew $B * H$, se arată că inducția R a acesteia la G în sensul lui Puig este izomorfă cu algebra grupală skew peste G a inducției, în sensul lui Turull, al lui B la G . Mai exact, avem următorul rezultat.

Theorem

$\varphi : \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} S \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}G \rightarrow R$, $g \otimes s \otimes f \mapsto g \cdot s \cdot f$
este un izomorfism G -graduat de algebre G -interioare, și diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}G \otimes_{\mathcal{O}H} S \otimes_{\mathcal{O}H} \mathcal{O}G & \longrightarrow & R \\ \uparrow & \nearrow & \\ \mathcal{O}G & & \end{array}$$

de algebre G -interioare G -graduate este comutativă.

Camelia Dicu, *Metode modul-teoretice in studiul G-algebrelor si al grupurilor punctate*, EFES Publishing House, Cluj-Napoca, 2008, 92pp, ISBN 978-606-526-002-3. (teza de doctorat)

Gabriela Olteanu, *Wedderburn decomposition of group algebras and applications*, EFES Publishing House, Cluj-Napoca, 2008, 165pp, ISBN 978-973-7677-98-3. (teza de doctorat)

Simion Breaz, Septimiu Crivei, **Andrei Marcus** Editors, *Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory*, "Babeș-Bolyai" University Cluj-Napoca, 2008; Cluj University Press, 2009. ISBN 978-973-610-897-6. (volum conferință)

Gabriela Olteanu, *Computation and applications of Schur indices*, in Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory (Cluj-Napoca, Romania, July 7-12, 2008), Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2009, 149–157. (articol de sinteză)

Andrei Marcus, *Derived equivalences and the abelian defect group conjecture*, in Proceedings of the International Conference on Modules and Representation Theory, "Babes-Bolyai" University Cluj, 2008; 111–131. (articol de sinteză)

Cheltuieli de personal

Nr. crt.	Nume	2007	2008	2009
1	Andrei Marcus	Total	Total	43.862,47
2	Gabriela Olteanu	1+2+3	1+2+3	21.717,64
3	Camelia Dicu	29600	102.773	0
4	Cosmin Todea	Total 4+5	Total 4+5	21.632,00
5	Tiberiu Coconet	8800	42.827	14.923,89
Total		38400	145.600	102.136,00

Activități (Todea și Coconet): (http://math.ubbcluj.ro/aga_team/)

- susținerea examenelor și referatelor de doctorat
- prezentări la seminar
- articole elaborate: Todea 3, Coconet 2
- câte o prezentare la simpozionul din mai 2009
- stagii de cercetare: Wuppertal, Bielefeld, Budapesta, Nat. Univ. of Ireland, Aberdeen

Dificultăți întâmpinate

- 1 formulare stufoase pentru finanțare și decontare;
- 2 avansul de doar 30% - universitatea trebuie să avanseze bani;
- 3 nefinanțarea participării la conferințe;
- 4 scurtarea perioadei efectiv acoperite de finanțare și nesiguranța că aceasta va veni;