

## ÉQUATIONS DE HAMILTON-JACOBI ET CONTRÔLE OPTIMAL

RADU IGNAT

École Normale Supérieure  
45, Rue d'Ulm  
75005 Paris, France  
E-mail: ignat@clipper.ens.fr

### 1. INTRODUCTION

Le but de ce poster est d'étudier la définition des solutions des équations de Hamilton-Jacobi. On montre d'abord que la notion classique de solution est insuffisante, en utilisant la méthode des caractéristiques qui met en évidence l'apparition des singularités. On s'intéresse ensuite à la définition de solutions généralisées. On introduit la notion de solutions de viscosité, et on étudie leurs propriétés (existence et unicité). Pour prouver l'existence des solutions de viscosité on passe par l'intermédiaire de la théorie du contrôle des équations différentielles ordinaires qui fournit une solution pour un Hamiltonien convexe.

*Note:* En raison du nombre limité de pages, on omettra par fois les démonstrations.

### 2. MÉTHODE DES CARACTÉRISTIQUES

On étudie le problème de Dirichlet pour l'équation de Hamilton-Jacobi:

$$(1) \quad \begin{cases} H(\nabla u(x), u(x), x) = 0 & \text{dans } U \\ u = g & \text{sur } \Gamma \subset \partial U \end{cases}$$

où  $U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (le Hamiltonien) et  $g: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données et  $u: \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction inconnue.

**2.1. Équations caractéristiques.** La méthode des caractéristiques consiste à introduire des chemins dans  $U$  (appelés caractéristiques) le long desquels on va résoudre l'équation.

Considérons donc une solution régulière  $u$  de l'équation, et un chemin  $\vec{x}: I \rightarrow U$  ( $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ). On note  $\vec{x}(s) = (x^1(s), \dots, x^n(s))$ ,  $z(s) = u(\vec{x}(s))$  et  $\vec{p}(s) = \nabla u(\vec{x}(s)) = (p^1(s), \dots, p^n(s))$ .

En imposant  $\dot{x}^j(s) = \frac{\partial H}{\partial p_j}(\vec{p}, z, \vec{x})$  pour  $j = 1, \dots, n$ , on déduit le système EDO des  $2n + 1$  équations caractéristiques de l'EDP (1):

$$(2) \quad \begin{cases} (a) & \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial H}{\partial z}(\vec{p}, z, \vec{x})\vec{p} - \nabla_x H(\vec{p}, z, \vec{x}) \\ (b) & \dot{z} = \vec{p} \cdot \nabla_p H(\vec{p}, z, \vec{x}) \\ (c) & \dot{\vec{x}} = \nabla_p H(\vec{p}, z, \vec{x}) \end{cases}$$

En résumé:

**Proposition 2.1.** *Si  $H$  est de classe  $C^1$  et  $u$  est une solution de classe  $C^2$  de l'EDP (1) sur  $U$  et si  $\vec{x}$  est un chemin dans  $U$  satisfaisant (2c) alors (2a) et (2b) sont vérifiés.*

**2.2. Cas du problème de Cauchy – Lien avec la mécanique.** Voyons la forme des équations caractéristiques dans le cas du problème de Cauchy:

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 \quad \text{dans } U \times \mathbb{R}$$

$U$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $H: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée (on notera respectivement  $p$  et  $x$  ses variables) et  $u: U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est la fonction inconnue (de variables  $x$  et  $t$ ). On ajoute une condition initiale:

$$u(x, 0) = g(x) \quad \text{sur } U.$$

C'est un cas particulier du problème de Dirichlet en dimension  $n + 1$ , en effet l'équation se réécrit  $\tilde{H}(\nabla u, u, y) = 0$  avec  $\tilde{H}(q, z, y) = p_{n+1} + H(p, x)$ ,  $y = (x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ,  $q = (p, p_{n+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ . Les équations caractéristiques s'écrivent donc:

$$(4) \quad \begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= -\nabla_x H(\vec{p}, \vec{x}) \\ \dot{p}_{n+1} &= 0 \\ \dot{z} &= \vec{q} \cdot \nabla_q \tilde{H} = \vec{p} \cdot \nabla_p H + p_{n+1} \end{aligned}$$

$$(5) \quad \dot{\vec{x}} = \nabla_p H$$

et  $\dot{t} = 1$  ce qui permet d'identifier le temps  $t$  et la variable  $s$ . Les équations (4) et (5) sont appelées les équations de Hamilton. En mécanique analytique le chemin  $\vec{x}(t)$  représente la trajectoire,  $\vec{p}$  l'impulsion et  $H$  l'Hamiltonien est l'énergie:  $H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{x})$ . Les équations de Hamilton ne sont autres que  $\vec{p} = m\vec{v}$  et  $\dot{\vec{p}} = -\nabla V$ . On a  $p_{n+1} = -H(\vec{p}, \vec{x})$  et  $\dot{p}_{n+1} = 0$ , ce qui traduit la conservation de l'énergie. Enfin,  $z$  représente l'action, on a  $\dot{z} = \vec{p} \cdot \vec{v} - H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - V = L$  le Lagrangien, et on retrouve bien que l'action  $z$  est l'intégrale du Lagrangien (pour plus de détails, cf. [1]).

**2.3. Conditions au bord.** On revient au cas du problème de Dirichlet. On veut résoudre l'équation en construisant la solution  $u$  le long des chemins  $\vec{x}$  vérifiant les équations caractéristiques, en partant du bord de  $U$ . On va donc étudier la construction de  $u$  au voisinage d'un point  $x^0$  de  $\partial U$ . Pour simplifier, on suppose qu'au voisinage de ce point, la frontière de  $U$  est "droite", i.e. incluse dans  $\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$ , et que  $U$  est "au dessus" de  $\partial U$  i.e. localement contenu dans  $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}_+$ . On peut toujours, si  $U$  est suffisamment régulier, se ramener à ce cas par un difféomorphisme

local qui “aplatit” la frontière de  $U$ , car un tel difféomorphisme ne modifie pas la forme de l'équation (1).

On cherche des conditions initiales pour les équations caractéristiques:  $\vec{p}(0) = p^0$ ,  $z(0) = z^0$ , et  $\vec{x}(0) = x^0$ . Nécessairement,

$$\begin{cases} z^0 = g(x^0) \\ p_i^0 = g_{x_i}(x^0) \\ H(p^0, z^0, x^0) = 0 \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n-1$$

Si le triplet  $(p^0, z^0, x^0)$  vérifie ces conditions, il est dit admissible. Remarquons que pour  $p_n^0$  il peut y avoir zéro, une ou plusieurs solutions.

**Proposition 2.2.** *Soit  $(p^0, z^0, x^0)$  un triplet tel que  $H(p^0, z^0, x^0) = 0$ . On suppose que  $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ . Alors il existe une fonction  $q$  régulière, définie au voisinage de  $x^0$  dans  $\partial U$  telle que pour tout  $y$  proche de  $x^0$ , le triplet  $(q(y), g(y), y)$  soit admissible.*

*Démonstration.* On applique le théorème des fonctions implicites à la fonction  $G(p, y)$  définie, au voisinage de  $(p^0, x^0)$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , par

$$\begin{aligned} G^i(p_1, \dots, p_n, y_1, \dots, y_n) &= p_i - g_{x_i}(y_1, \dots, y_{n-1}, 0) \quad (1 \leq i \leq n-1) \\ G^n(p_1, \dots, p_n, y_1, \dots, y_n) &= H(p, g(y_1, \dots, y_{n-1}, 0), y). \end{aligned}$$

□

**2.4. Construction de la solution au voisinage de la frontière.** Soit  $(p^0, z^0, x^0)$  un triplet admissible tel que  $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ . D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, on peut résoudre les équations caractéristiques (2) pour chaque  $y = (y', 0)$  au voisinage de  $x^0$  avec comme donnée initiale  $(q(y), g(y), y)$ . On obtient donc des fonctions  $\vec{p}(y, s)$ ,  $z(y, s)$  et  $\vec{x}(y, s)$ .

**Lemme 2.3.** *L'application  $(y, s) \mapsto \vec{x}(y, s)$  est inversible au voisinage de  $(x^0, 0)$ : Il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant 0, un voisinage ouvert  $W$  de  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^{n-1}$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $x^0$  dans  $\mathbb{R}^n$  vérifiant: pour tout  $x$  dans  $V$ , il existe une unique  $(y, s) \in W \times I$  tel que  $x = \vec{x}(y, s)$ ; de plus les applications  $x \mapsto s$  et  $x \mapsto y$  sont régulières.*

*Démonstration.* Il suffit de prouver que la différentielle de  $\vec{x}$  en  $(x^0, 0)$  est inversible et le théorème d'inversion locale fournit le résultat.

□

On peut maintenant construire la solution  $u$  de l'équation (1), en posant

$$(6) \quad u(x) = z(y(x), s(x)) = z(\vec{x}^{-1}(x))$$

$$(7) \quad \vec{v}(x) = \vec{p}(y(x), s(x)) = \vec{p}(\vec{x}^{-1}(x)).$$

**Théorème 2.4.** *Sous les hypothèses suivantes:*

- (i)  $(p^0, z^0, x^0)$  est admissible,
- (ii)  $H_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$ ,
- (iii) Les fonctions  $\vec{p}$ ,  $z$ ,  $\vec{x}$  sont solutions des équations caractéristiques avec les conditions initiales  $\vec{p}(y, 0) = \vec{q}(y)$ ,  $z(y, 0) = g(y)$ ,  $\vec{x}(y, 0) = y$ ,

la fonction  $u$  définie ci-dessus est régulière et vérifie

$$\begin{cases} H(\nabla u, u, x) = 0 & \text{dans } V \\ u = g & \text{sur } \Gamma \cap V. \end{cases}$$

*Schema de démonstration.* 1. Posons  $f(y, s) = H(\bar{p}(y, s), z(y, s), \bar{x}(y, s))$ . La fonction  $f$  est nulle au voisinage de  $(x^0, 0)$  (en effet  $f(y, 0) = H(q(y), g(y), y) = 0$  et par (2)  $\frac{\partial f}{\partial s} = 0$ ) et donc  $H(\bar{v}(x), u(x), x) = 0$ .

2. En utilisant les équations caractéristiques (2b) et (2c) et que  $\frac{\partial z}{\partial y_i} = \bar{p} \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial y_i}$  on montre que  $\bar{v}(x) = \nabla u(x)$  sur  $V$ .

3. Enfin,  $u = g$  sur  $\Gamma$ : ceci est évident par construction de  $u$ .

□

*Remarque: régularité des fonctions:* dans tous les calculs précédents, il suffit de supposer  $H$  et  $g$  de classe  $C^2$ , et on obtient alors des solutions  $\bar{x}, \bar{p}, z, u$ , etc, de classe  $C^2$  grâce aux propriétés de régularité dans les théorèmes d'inversion locale et de Cauchy-Lipschitz (voir [4]).

Cas du problème de Cauchy:  $u_t + H(\nabla_x u, x) = 0$ . Un triplet  $(p^0, p_{n+1}^0, z^0, x^0)$  est admissible si  $z^0 = g(x^0)$ ,  $p^0 = \nabla g(x^0)$  et  $p_{n+1}^0 = -H(p^0, x^0)$ . La condition  $\tilde{H}_{p_{n+1}} \neq 0$  est toujours vérifiée. Ainsi pour construire  $u$ , il reste à résoudre les équations de Hamilton (4) et (5) et à intégrer l'équation  $\dot{z} = \bar{p} \cdot \nabla_p H + p_{n+1}$ .

**2.5. Singularité au bout d'un temps fini.** La construction précédente, faite au voisinage de tout point  $x^0$  de  $\partial U$  (les recollements des voisinages des différents points de  $\partial U$  se font bien), donne une solution  $u$  définie au voisinage de la frontière de  $U$ . Dans le cas du problème de Cauchy, on obtient une solution  $u$  définie pour  $t$  proche de 0. Cependant, en général, on ne peut prolonger cette solution à tout l'ouvert  $U$ . Plus précisément, les singularités se produisent lorsque des caractéristiques  $s \mapsto \bar{x}(s)$  issues de points  $x^0$  distincts se croisent (cf. fig. 1); on a alors "2 valeurs" pour le gradient de  $u$ .

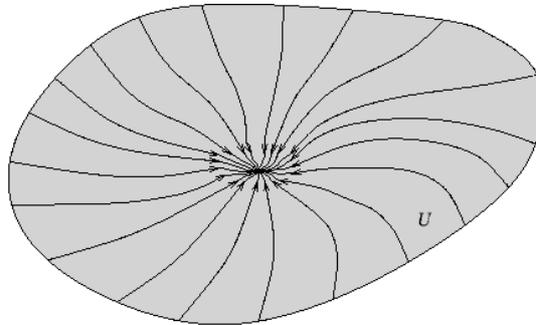


fig. 1 : intersection des caractéristiques

**Exemple 1:** Prenons le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} |\nabla u|^2 = 1 & \text{dans } B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sur } C(0, 1). \end{cases}$$

Ici  $H(p, z, x) = |p|^2 - 1$ . Pour chaque  $x^0 \in C(0, 1)$ , on déduit par (2)  $\vec{p} = -x^0$ ,  $\vec{x} = -2tx^0 + x^0$ ,  $z = 2t$ , donc les caractéristiques sont les rayons orientés vers l'origine, et  $u = 1 - |x|$ . On voit que  $\nabla u$  a une singularité à l'origine.

**Exemple 2:** Considérons le problème de Cauchy,

$$\begin{cases} u_t + |\nabla_x u|^2 = 0 & (x \in \mathbb{R}^2), \\ u(0, x) = \frac{1}{1+|x|^2}. \end{cases}$$

On trouve alors  $\vec{p} = p^0 = \frac{-2x^0}{(1+|x^0|^2)^2}$ ,  $z = z^0 + t|p^0|^2$  et  $\vec{x} = x^0 + 2tp^0$ . Ainsi, on voit que les caractéristiques se croisent en un temps fini, d'où une discontinuité de  $\nabla u$ .

### 3. SOLUTIONS DE VISCOSITÉ – PROBLÈME D'UNICITÉ

Dans cette partie on étudie l'existence, l'unicité et quelques propriétés pour un type de solutions généralisées (faibles) du problème de Cauchy pour l'équation de Hamilton-Jacobi:

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 & \text{dans } Q = \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u = g & \text{sur } \partial Q = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Ici les données sont les fonctions continues  $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et on cherche  $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u = u(x, t)$ . Par la méthode des caractéristiques, on a vu qu'en général, il n'existe pas de solution régulière définie pour tout  $t \geq 0$ . Pour éliminer cet inconvénient, M. Crandall et P.-L. Lions ont introduit la notion de solution de viscosité. Notons que l'on peut traiter aussi le problème de Dirichlet associé à l'équation de Hamilton-Jacobi (cf. [2], [3]), mais pour simplifier l'étude, on se restreint ici au problème de Cauchy.

**3.1. Introduction aux solutions généralisées.** La première idée est de régulariser (8) (qui est une EDP non linéaire du premier ordre) pour avoir un nouveau problème qui possède une solution régulière (cette méthode s'appelle la *viscosité évanescence*). On considère donc, pour  $\varepsilon > 0$ , le problème suivant:

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} + H(\nabla_x u^\varepsilon, x) - \varepsilon \Delta_x u^\varepsilon = 0 & \text{dans } Q \\ u^\varepsilon = g & \text{sur } \partial Q \end{cases}$$

On admet que (9), qui est une EDP quasilineaire parabolique du second ordre, a une solution régulière  $u^\varepsilon$  sur  $\overline{Q}$ ; de plus, on trouve des estimations uniformes pour ses solutions i.e. pour tout  $K$  compact de  $\overline{Q}$ , il existe  $c > 0$  tel que

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(K)}, \|\nabla_x u^\varepsilon\|_{L^\infty(K)}, \left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L^\infty(K)} \leq c$$

pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit (ici on a supposé que  $H$  et  $g$  sont régulières) (cf. [6]). Donc la famille  $\{u^\varepsilon\}_\varepsilon$  est localement bornée et équicontinue, d'où par le théorème d'Ascoli, l'existence d'une sous-suite  $\varepsilon_j \rightarrow 0$  telle que  $u^{\varepsilon_j} \rightarrow u$  localement uniformément sur  $\overline{Q}$ , et la limite  $u$  est dans  $C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty[)$ . Bien évidemment, on s'attend à ce que  $u$  soit une solution "faible" du problème (8); mais on sait seulement que  $u$  est continue dans  $\overline{Q}$  et on n'a pas d'information sur  $\nabla_x u$  et  $\frac{\partial u}{\partial t}$  (dans quel sens ces dérivées existent-elles?).

Dans les années 1960, plusieurs auteurs ont montré l'existence d'une fonction  $u$  continue et localement lipschitzienne sur  $Q$  qui satisfait

$$(10) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 & \text{p.p. dans } Q \\ u = g & \text{sur } \partial Q \end{cases}$$

Malheureusement, ce type de solution généralisée est trop faible pour qu'on ait l'unicité et la stabilité par passage à la limite dans  $L^\infty$ . En effet, considérons le problème

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 = 0 & \text{p.p. dans } \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \\ u = 0 & \text{sur } \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Il existe au moins deux solutions: la solution nulle, mais aussi la fonction

$$v(x, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \geq t \\ -t + |x| & \text{si } |x| < t. \end{cases}$$

Pour avoir l'unicité, on va introduire la notion de *solution de viscosité*.

**3.2. Solutions de viscosité.** L'idée qui est apparue au début des années 1980 consiste à fixer une fonction test régulière  $\varphi$  et de passer de (9) à (8) quand  $\varepsilon$  tend vers 0, en mettant les dérivées sur  $\varphi$  et en utilisant le principe du maximum pour  $u - \varphi$ .

**Définition 3.1.** Une fonction  $u : \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est appelée **solution de viscosité** du problème (8) si:

- (i)  $u$  est bornée et uniformément continue,
- (ii)  $u = g$  sur  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ ,
- (iii) pour tout  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$ , si  $u - \varphi$  a un maximum (resp. minimum) local en  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ , alors  $\varphi_t(x_0, t_0) + H(\nabla_x \varphi(x_0, t_0), x_0) \leq 0$  (resp.  $\geq 0$ );

*Motivation:* On va montrer que la solution  $u$  construite avec la méthode de la viscosité évanescence est en fait une solution de viscosité. On va vérifier la condition iii. (la condition ii. est bien sûr satisfaite, mais pour avoir i. on doit demander des hypothèses supplémentaires sur  $H$ , voir [6]). Soit  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, \infty[)$ , on suppose que  $u - \varphi$  a un maximum local strict en  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$ . On montre que pour  $\varepsilon_j > 0$  assez petit,  $u^{\varepsilon_j} - \varphi$  a un maximum local en  $(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$  et  $\lim_{j \rightarrow \infty} (x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) = (x_0, t_0)$ . On a de plus  $\nabla_x u^{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) = \nabla_x \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j})$ ,  $\frac{\partial u^{\varepsilon_j}}{\partial t}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j})$ ,  $\Delta u^{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) \leq \Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j})$ . On en déduit que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) + H(\nabla_x \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}), x_{\varepsilon_j}) = \varepsilon_j \Delta u^{\varepsilon_j}(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}) \leq \varepsilon_j \Delta \varphi(x_{\varepsilon_j}, t_{\varepsilon_j}).$$

Comme  $\varphi$  régulière et  $H$  continue, en faisant tendre  $\varepsilon_j$  vers 0, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(x_0, t_0) + H(\nabla_x \varphi(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

Pour le cas général, i.e. lorsque  $u - \varphi$  a un maximum local en  $(x_0, t_0)$ , on prend  $\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi(x, t) + |x - x_0|^2 + (t - t_0)^2$  de sorte que  $u - \tilde{\varphi}$  ait un maximum local strict en  $(x_0, t_0)$ , d'où  $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t}(x_0, t_0) + H(\nabla_x \tilde{\varphi}(x_0, t_0), x_0) \leq 0$ .

Comme les dérivées du premier ordre de  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  coïncident en  $(x_0, t_0)$ , on obtient iii. (pour le minimum local, on applique la même technique).

□

**3.3. Cohérence avec les solutions classiques.** Ici on va vérifier que la notion de solution de viscosité est cohérente avec celle de solution classique de (8).

D'abord, on remarque que toute solution  $u \in C^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty[)$  qui satisfait (8) et qui est bornée et uniformément continue, est une solution de viscosité.

On montre maintenant la réciproque i.e. toute solution de viscosité régulière est une solution classique.

**Théorème 3.2.** *Soit  $u$  une solution de viscosité de (8) et  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[$  un point où  $u$  est différentiable. Alors  $u_t(x_0, t_0) + H(\nabla_x u(x_0, t_0), x_0) = 0$ .*

*Preuve.* on peut trouver  $v \in C^1$  telle que  $u - v$  a un maximum strict en  $(x_0, t_0)$ . Soit  $(\eta_\varepsilon)_\varepsilon$  la suite usuelle régularisante de  $\mathbb{R}^{n+1}$ . On pose  $\varphi^\varepsilon = \eta_\varepsilon * v$ . Alors  $\varphi^\varepsilon \in C^\infty(Q)$  et  $\varphi^\varepsilon \rightarrow v$ ,  $\nabla_x \varphi^\varepsilon \rightarrow \nabla_x v$ ,  $\varphi_t^\varepsilon \rightarrow v_t$  uniformément au voisinage de  $(x_0, t_0)$ . On déduit que  $u - \varphi^\varepsilon$  a un maximum local en un point  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon)$ , avec  $(x_\varepsilon, t_\varepsilon) \rightarrow (x_0, t_0)$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Par suite,  $\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial t}(x_\varepsilon, t_\varepsilon) + H(\nabla_x \varphi^\varepsilon(x_\varepsilon, t_\varepsilon), x_\varepsilon) \leq 0$ . En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, comme les dérivées de  $u$  et  $v$  coïncident en  $(x_0, t_0)$ , on obtient:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_0, t_0) + H(\nabla_x u(x_0, t_0), x_0) \leq 0.$$

Pour l'inégalité inverse, on raisonne de même à l'aide d'une fonction  $\tilde{v} \in C^1$  telle que  $u - \tilde{v}$  a un minimum strict en  $(x_0, t_0)$ . □

**3.4. Unicité.** Le but de cette section est de montrer l'unicité de la solution de viscosité pour le problème (8). On va traiter un cas plus général: pour  $T > 0$ , on considère le problème

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + H(\nabla_x u, x) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times ]0, T] \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

On dit que  $u$  est une *solution de viscosité* de (12) si  $u$  est bornée et uniformément continue,  $u = g$  sur  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$  et  $u$  vérifie les inégalités de la définition 3.1 quand  $u - \varphi$  a un maximum ou un minimum local en  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times ]0, T[$ . En fait, on peut admettre que  $t_0 = T$  sans rien changer.

**Théorème 3.3.** *Si  $H$  satisfait les hypothèse de type Lipschitz suivantes:*

$$\exists c > 0, \forall x, y, p, q \in \mathbb{R}^n, \begin{cases} |H(p, x) - H(q, x)| \leq c|p - q| \\ |H(p, x) - H(p, y)| \leq c|x - y|(1 + |p|) \end{cases}$$

*alors il existe au plus une solution de viscosité de (12).*

*Preuve.* Voir [4].

*Références:* on trouvera des théorèmes d'unicité plus élaborés dans [2], [3], [6].

#### 4. THÉORIE DU CONTRÔLE – PROGRAMMATION DYNAMIQUE

On a vu qu'une méthode pour montrer l'existence d'une solution de viscosité est de régulariser (8) par (9), de prouver l'existence d'une solution régulière  $u^\varepsilon$  pour (9) et ensuite de faire de bonnes estimations uniformes sur  $u^\varepsilon$ . Cependant cette méthode nécessite des connaissances technique sur les bornes de la solution de l'équation de

la chaleur, ce qui n'est pas le but de cet exposé. On va montrer — dans un cas moins général — l'existence d'une solution viscosité pour (8) à l'aide de la théorie du contrôle pour les équations différentielles ordinaires et de la méthode de programmation dynamique.

**4.1. Introduction à la théorie du contrôle.** Dans cette section, on va étudier la contrôlabilité de la solution  $\mathbf{x}$  de l'EDO:

$$(12) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), \alpha(s)) & \text{dans } ]0, t[ \\ \mathbf{x}(t) = x. \end{cases}$$

Ici,  $x \in \mathbb{R}^n$  est le point terminal de la solution  $\mathbf{x}(\cdot)$  à l'instant terminal  $t \leq T$ , où  $T > 0$  est fixé;  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction donnée qui est bornée, continue et lipschitzienne par rapport à la première variable et  $A$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^m$ . La fonction  $\alpha$  est le *contrôle*, i.e. une façon d'ajuster les paramètres de  $A$  quand le temps décroît (dans notre cas) et qui affecte la dynamique du système donnée par (13). On note  $\mathcal{A} = \{\alpha : [0, T] \rightarrow A \mid \alpha \text{ est mesurable}\}$  l'ensemble des contrôles admissibles. Il résulte des hypothèses ci-dessus que pour tout contrôle  $\alpha \in \mathcal{A}$ , l'EDO (13) a une solution unique, lipschitzienne sur l'intervalle  $[0, t]$  et qui vérifie l'équation presque partout sur  $]0, t[$ .

Notre but est de trouver le contrôle  $\alpha^*$  qui rend le système optimal. Pour définir le sens du mot "optimal", on doit introduire un *critère de coût*. Pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $0 \leq t \leq T$ , on considère pour chaque contrôle  $\alpha \in \mathcal{A}$  le *coût*:

$$C_{x,t}(\alpha) = \int_0^t h(\mathbf{x}(s), \alpha(s)) ds + g(\mathbf{x}(0))$$

où  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^\alpha$  la solution de (13) et  $h : \mathbb{R}^n \times A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions données qui vérifient pour un  $C > 0$  les conditions:

$$\begin{cases} |h(x, a)| \leq C, |g(x)| \leq C \\ |h(x, a) - h(y, a)| \leq C|x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \forall a \in A \\ |g(x) - g(y)| \leq C|x - y|. \end{cases}$$

De plus, on suppose que  $h$  est continue sur  $\mathbb{R}^n \times A$ . Maintenant on veut trouver (si c'est possible) un contrôle  $\alpha^*$  qui minimise la fonction de coût parmi les contrôles admissibles, pour chaque donnée  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$ .

#### 4.2. Programmation dynamique et Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

La méthode de la programmation dynamique consiste à résoudre le problème précédent en considérant la fonction

$$u(x, t) = \inf_{\alpha \in \mathcal{A}} C_{x,t}(\alpha) \quad (x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T).$$

L'idée est de montrer que cette fonction est solution d'une EDP du type de (12) et ensuite de prouver la réciproque, c'est à dire, à l'aide d'une solution de l'EDP (12), trouver le contrôle optimal.

D'abord, on vérifie que  $u$  est bornée et uniformément continue (en fait  $u$  est lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ ).

**Théorème 4.1.** *La fonction  $u$  est la solution de viscosité de l'EDP suivante:*

$$(13) \quad \begin{cases} u_t(x, t) + \max_{a \in A} (\mathbf{f}(x, a) \cdot \nabla_x u(x, t) - h(x, a)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times ]0, T[ \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\}. \end{cases}$$

L'équation (13) est appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Son hamiltonien est  $H(p, x) = \max_{a \in A} (\mathbf{f}(x, a) \cdot p - h(x, a))$ . Notons qu'il est convexe par rapport à  $p$  et vérifie les hypothèses du théorème d'unicité 2.5.

*Démonstration.* Voir [4].

*Remarque:* On a montré ainsi que la fonction  $u$ , qui minimise le coût, est l'unique solution de viscosité du problème (14) pour l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. On s'intéresse maintenant à la réciproque: comment peut-on trouver le contrôle optimal à partir de cette EDP? Voici l'idée de la construction du contrôle optimal. Étant donné une date finale  $0 < t \leq T$  et un état final  $x \in \mathbb{R}^n$ , on considère l'EDO optimale

$$(14) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^*(s) = \mathbf{f}(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) & \text{sur } ]0, t[ \\ \mathbf{x}^*(t) = x. \end{cases}$$

où pour tout temps  $s$ , on choisit  $\alpha^*(s) \in A$  tel que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) \cdot \nabla_x u(\mathbf{x}^*(s), s) - h(\mathbf{x}^*(s), \alpha^*(s)) = H(\nabla_x u(\mathbf{x}^*(s), s), \mathbf{x}^*(s)).$$

Autrement dit, quand le système est dans l'état  $\mathbf{x}^*(s)$  à l'instant  $s$ , on choisit la valeur du contrôle optimal  $\alpha^*(s)$  qui atteint le maximum dans la définition du hamiltonien  $H$  de l'EDP (14). On dit que  $\alpha^*$  est *le contrôle rétroactif (feedback control)*. On vérifie aisément que cette méthode génère la trajectoire de coût minimal, au moins dans les régions où  $u$  et  $\alpha^*$  sont régulières (pour que l'équation ci-dessus ait bien un sens); mais l'interprétation de cette équation quand  $\nabla u$  n'existe pas est problématique (cf. [2]).

**4.3. Existence d'une solution pour un Hamiltonien convexe.** En s'inspirant de ce qui précède, on va montrer l'existence d'une solution de viscosité dans le cas où le Hamiltonien ne dépend que de  $p$  et est convexe:

$$(15) \quad \begin{cases} u_t + H(\nabla_x u) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times ]0, \infty[ \\ u(t = 0) = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

Pour cela on va se ramener à une équation de Hamilton-Jacobi-Bellman grâce à la transformation de Legendre.

On suppose que  $H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est convexe (donc continu) et tel que

$$(16) \quad \frac{H(p)}{|p|} \xrightarrow{|p| \rightarrow \infty} +\infty$$

et que  $g$  est lipschitzienne.

On appelle transformée de Legendre de  $H$  la fonction suivante, appelé Lagrangien:

$$(17) \quad L(q) = H^*(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} (q \cdot p - H(p)) \quad (q \in \mathbb{R}^n),$$

Exemple: le Hamiltonien de la mécanique est  $H(p, x) = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ . Sa transformée de Legendre par rapport à  $p$  est  $L(q, x) = \sup_p (q \cdot p - \frac{p^2}{2m} - V(x)) = \frac{m}{2} q^2 - V(x) = \frac{p^{*2}}{2m} - V(x)$ . Le maximum est atteint pour  $p^* = mq$ . Ainsi  $q$  est la vitesse.

**Proposition 4.2.** *Le Lagrangien est convexe et vérifie aussi la propriété (16). De plus  $H$  est la transformée de Legendre de  $L$ :  $H = L^*$ . Les fonctions  $H$  et  $L$  sont dites fonctions convexes duales.*

On est ramené à une équation du type Hamilton-Jacobi-Bellman. On pose donc

$$u(x, t) = \inf \left\{ \int_0^t L(\dot{w}(s)) ds + g(w(0)) \mid w \in C^1([0, t]), w(t) = x \right\}.$$

**Proposition 4.3.** *Si  $t \neq 0$ , on a*

$$(18) \quad u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ tL \left( \frac{x-y}{t} \right) + g(y) \right\}.$$

L'expression au second membre de (18) s'appelle la formule de Hopf-Lax.

**Théorème 4.4.** *On suppose que  $H$  ne dépend que de  $p$ , est convexe et que  $H(p)/|p|$  tend vers  $+\infty$  lorsque  $|p|$  tend vers  $+\infty$ . On suppose de plus que  $g$  est bornée et lipschitzienne. Alors l'équation*

$$(19) \quad \begin{cases} u_t(x, t) + H(\nabla_x u(x, t)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times ]0, T[ \\ u = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \times \{0\} \end{cases}$$

admet la solution de viscosité donnée par la formule de Hopf-Lax (19).

*Démonstration.* Voir [4].

#### CONCLUSION

Les théorèmes précédents montrent que les solutions de viscosité constituent la notion adaptée de solution faible des équations de Hamilton-Jacobi. Cette méthode peut s'appliquer à une classe plus générale d'équations que celles étudiées ici, notamment on peut traiter certaines équations du second ordre et obtenir des résultats similaires (cf. [2]). En ce qui concerne les applications des équations de Hamilton-Jacobi, citons la mécanique, comme on l'a vu plus haut, mais aussi l'optique (équation eikonale), les probabilités (cf. [5]) et la géométrie (par exemple l'étude des mouvements de surface) (cf. [2]).

#### REFERENCES

- [1] V. Arnold. *Méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, 1976.
- [2] M. Bardi, M. G. Crandall, L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. *Viscosity solutions and applications*. Lecture notes in Mathematics. Springer, 1997.
- [3] G. Barles. *Solution de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*. Springer-Verlag, 1994.
- [4] L. C. Evans. *Partial differential equations*. AMS Press, 1998.
- [5] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*. Springer, 1993.
- [6] P.-L. Lions. *Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations*. Research Notes in Mathematics 69. Pitman Advanced Publishing Program, 1982.