DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 40 (2022), pp. 19–28

OPERATORI COMPACŢI. ANALIZĂ SPECTRALĂ

Luminiţa JARDA

Rezumat. Within this article we present a few ideas about compact operators and spectral analysis along with examples of compact operators and spectral properties of some compact and non-compact operators defined on the spaces l^p.

Cuvinte cheie. Compact operators, spectral properties.

1. INTRODUCERE

În acest articol ne propunem să prezentăm atât proprietăţi ale operatorilor compacţi, cât şi noţiuni de analiză spectrală pentru operatori liniari şi continui.

În secţiunea dedicată operatorilor compacţi vom studia în cadrul Exemplului 1 operatori multiplicativi compacţi definiţi pe spaţiile l^p, iar în secţiunea consacrată analizei spectrale vom determina valorile proprii şi spectrul operatorilor multiplicativi nu neapărat compacţi (Exemplul 2). Tot în cadrul secţiunii de analiză spectrală vom analiza proprietăţile spectrale ale operatorilor shift definiţi pe l^2 (Exemplul 3), despre care vom vedea că nu sunt compacţi. în finalul acestei secţiuni vom studia proprietăţile spectrale ale unui operator definit ca şi compunere a operatorului right shift cu un operator multiplicativ (Exemplul 4).

Noţiunile teoretice referitoare la operatorii compacţi şi analiză spectrală au fost preluate din monografia lui H. Brezis [2], iar exemplele conţin soluţii ale autoarei la unele probleme propuse în capitolul 6 din [2].

Notaţii utilizate

Simbolul $\mathbb{K}$ desemnează unul din corpurile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$. Dacă X şi Y sunt $\mathbb{K}$-spaţii vectoriale, iar $A\colon X \to Y$ este un operator liniar, atunci scriem $Ax := A(x)$, dacă $x \in X$. De asemenea, $N(A)$ desemnează nucleul operatorului A, iar $\mathrm{Im}(A)$ imaginea sa. Dacă X este un $\mathbb{K}$-spaţiu normat, atunci norma pe acest spaţiu se notează cu $||\cdot||_X$, iar bila unitate închisă cu B_X. Dacă X şi Y sunt $\mathbb{K}$-spaţii normate, atunci $LC(X,Y)$ reprezintă spaţiul operatorilor liniari şi continui de la X la Y, iar $LC(X)$ spaţiul operatorilor liniari şi continui de la X la X. Operatorul identitate definit pe X este notat cu $I\colon X \to X$, $Ix = x$, oricare ar fi $x \in X$.

Reamintim, pentru început, cum sunt definite spaţiile l^p . Fie s mulţimea tuturor şirurilor cu elemente din $\mathbb{K}$ şi fie $p \in [1, \infty]$. Mulţimea l^p este definită astfel:

• $p \in [1, \infty)$: $l^p = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in s \ : \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty\}$,

• $p = \infty$: $l^\infty = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in s \ : \ (x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este mărginit $\}$.

Pentru spaţiul l^p cu $p \in [1, \infty)$ norma $\| \cdot \|_{l^p} : l^p \to \mathbb{R}$ este definită astfel:

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_{l^p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Pentru spaţiul l^∞ norma $\| \cdot \|_\infty : l^\infty \to \mathbb{R}$ este definită astfel:

$$\|(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}\|_\infty = \sup\{|x_n| \ : \ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Reamintim faptul că atât pentru $p \in [1, \infty)$, cât şi pentru $p = \infty$, avem că $(l^p, \| \cdot \|_{l^p})$ este un $\mathbb{K}$-spaţiu Banach.

2. OPERATORI COMPACŢI

Fie X şi Y două spaţii Banach reale, înzestrate cu topologiile induse de normele considerate pe acestea.

Definiţia 1. Un operator $A \in LC(X, Y)$ se numeşte **compact** dacă orice submulţime mărginită D a lui X are imaginea $A(D)$ relativ compactă (deci are închiderea compactă) în Y.

Notaţii: Mulţimea operatorilor compacţi de la X la Y se notează cu $K(X, Y)$, iar $K(X) := K(X, X)$.

Propoziţia 1. Fie $A \in LC(X, Y)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) $A \in K(X, Y)$.
(ii) $A(B_X)$ este relativ compactă în Y.
(iii) Orice şir mărginit $(x_n) \subseteq X$ are un subşir (x_{n_k}) astfel încât şirul (Ax_{n_k}) este convergent.

Demonstraţie. Implicaţia $(i) \Rightarrow (ii)$ este evidentă.
$(ii) \Rightarrow (iii)$ Fie $(x_n) \in X$ un şir mărginit. Deci există o constantă reală $M > 0$ astfel încât $\|x_n\|_X \leq M$, pentru orice n. Întrucât termenii şirului $(y_n) := (x_n/M)$ aparţin bilei B_X, termenii şirului (Ay_n) aparţin mulţimii compacte $\mathrm{cl}(A(B_x))$. Aşadar există un subşir (y_{n_k}) al lui (y_n) astfel încât (Ay_{n_k}) este convergent la un $l \in \mathrm{cl}(A(B_x))$. Dar atunci subşirul (x_{n_k}) al lui (x_n) are proprietatea că (Ax_{n_k}) converge la $M \cdot l$.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Fie D o submulţime mărginită a lui X. Aceasta înseamnă că orice şir din D este mărginit. Fie (y_n) un şir din $A(D)$. Atunci există un şir (x_n) în D astfel încât $y_n = Ax_n$, pentru orice n. Din (iii) rezultă existenţa unui subşir (x_{n_k}) al lui (x_n) astfel încât şirul $(Ay_{n_k}) = (y_{n_k})$ să fie convergent. în baza Teoremei 2.14.4 din [1], mulţimea $A(D)$ este relativ compactă. Aşadar operatorul A este compact. □

TEOREMA 1. Mulţimea $K(X, Y)$ este un subspaţiu vectorial închis al lui $LC(X, Y)$ (în topologia asociată normei $\| \ \|_{LC(X,Y)}$).

Demonstraţie. A se vedea [2, Theorem 6.1]. □

DEFINIŢIA 2. Fie $A \in LC(X, Y)$. Operatorul A se numeşte de **rang finit** dacă $\mathrm{Im}(A)$ este finit dimensional.

OBSERVAŢIA 1. Orice operator de rang finit este compact.

Demonstraţie. Fie $A \in LC(X, Y)$ un operator de rang finit. Din faptul că subspaţiul $\mathrm{Im}(A)$ al lui Y este finit dimensional, rezultă că el este o mulţime închisă în Y. Aşadar închiderea mulţimii $A(B_X)$ este inclusă în $\mathrm{Im}(A)$. Cum $A \in LC(X, Y)$, mulţimea $A(B_X)$ este mărginită. Folosind din nou faptul că $\mathrm{Im}(A)$ este finit dimensional, se obţine că mulţimea $A(B_X)$ este relativ compactă în Y. □

COROLARUL 1. Fie (A_n) un şir de operatori de rang finit din $LC(X, Y)$ şi $A \in LC(X, Y)$ astfel încât $\|A_n - A\|_{LC(X,Y)} \to 0$. Atunci A este compact.

OBSERVAŢIA 2. Faimoasa problemă a aproximării cunoscută ca fiind problema Banach, Grothendieck, vizează reciproca Corolarului 1 şi anume: Fiind dat un operator compact $A \in LC(X, Y)$, există în $LC(X, Y)$ un şir de operatori (A_n) de rang finit astfel încât $\|A_n - A\|_{LC(X,Y)} \to 0$? în general, nu. Se poate arăta că în multe cazuri răspunsul este totuşi afirmativ, de exemplu, dacă Y este un spaţiu Hilbert.

Lema următoare va fi utilizată în cadrul Exemplului 1.

LEMA 1. Fie (X, d) un spaţiu metric, (x_n) un şir din X, iar $x \in X$. Dacă orice subşir al şirului (x_n) are un subşir ce converge la x, atunci (x_n) converge la x.

Demonstraţie. Presupunem, prin reducere la absurd, că $x_n \not\to x$. Atunci există un $\epsilon > 0$ astfel încât pentru orice $n \in \mathbb{N}$, există $m \geq n$ astfel încât $d(x_m, x) \geq \epsilon$. Aşadar există un subşir (x_{n_k}) al lui (x_n) cu proprietatea că $d(x_{n_k}, x) \geq \epsilon$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Rezultă că niciun subşir al lui (x_{n_k}) nu poate converge la x, contradicţie. □

EXEMPLUL 1. Fie $X = l^p$ cu $1 \leq p \leq \infty$, iar (λ_n) un şir mărginit din $\mathbb{R}$ Operatorul multiplicativ $M \in LC(X)$ este definit prin

$$Mx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...), \quad x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...).$$

Atunci M este compact dacă şi numai dacă $\lambda_n \to 0$.

Demonstraţie. Pentru început, considerăm că $\lambda_n \to 0$ şi arătăm că M este compact. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie $A_n \colon X \to X$ definit prin

$$A_n x = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, 0, ...).$$

Fiecare operator A_n, $n \in \mathbb{N}^*$, este de rang finit. Cum

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - M\|_{LC(X)} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n+1} |\lambda_k| = 0,$$

avem că $A_n \to M$. în baza Corolarului 1 rezultă că M este compact.

În continuare, presupunem că M este compact şi arătăm că $\lambda_n \to 0$. Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, fie

$$e^n = (0, ..., 0, 1, 0, ...)$$

şirul al cărui termen de pe poziţia n este egal cu 1, iar ceilalţi termeni sunt 0. Fie acum $(e^{n_k})_k$ un subşir al lui (e^n) cu proprietatea că şirul $(Me^{n_k})_k = (\lambda_{n_k} e^{n_k})_k$ este convergent. Fie $x \in l^p$ limita acestui şir.

Reamintim faptul că dacă $(y^n)_n$ converge la y în l^p, atunci avem pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$ că $y_i^n \to y_i$ când $n \to \infty$ (datorită faptului că $|y_i^n - y_i| \leq \|y^n - y\|_{l^p}$ pentru orice i, $n \in \mathbb{N}^*$).

În cazul şirului $(\lambda_{n_k} e^{n_k})_k$, observăm că pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$ avem

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k} e_i^{n_k} = 0.$$

Într-adevăr, dacă $i \notin \{n_k \ : \ k \in \mathbb{N}^*\}$, atunci $\lambda_{n_k} e_i^{n_k} = 0$ pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$, iar dacă $i = n_{k_0}$, $k_0 \in \mathbb{N}^*$, atunci $\lambda_{n_k} e_i^{n_k} = 0$ pentru $k \neq k_0$ şi $\lambda_{n_k} e_i^{n_k} = 1$ pentru $k = k_0$. Aşadar $x = 0_{l^p}$.

Cum $||e^n||_{l^p} = 1$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$, şi cum operatorul M este compact, rezultă, în baza Propoziţiei 1 şi a raţionamentului de mai sus, că orice subşir $(e^{n_h})_h$ al şirului (e^n) are un subşir $(e^{n_{h_j}})_j$ cu proprietatea că $\lim\limits_{j\to\infty} Me^{n_{h_j}} = 0_{l^p}$. Lema 1 implică atunci $\lim\limits_{n\to\infty} Me^n = 0_{l^p}$. De aici se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} \|M(e^n)\|_{l^p} = 0$, aşadar $\lim\limits_{n\to\infty} |\lambda_n| = 0$. Concluzionăm că $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = 0$. □

PROPOZIŢIA 2. Fie X, Y şi Z trei spaţii Banach. Dacă $S \in LC(X, Y)$ şi $T \in K(Y, Z)$ (respectiv $S \in K(X, Y)$ şi $T \in LC(Y, Z)$), atunci $T \circ S \in K(X, Z)$.

Demonstraţie. Dacă $S \in LC(X, Y)$ şi $T \in K(Y, Z)$, atunci mulţimea $S(B_X)$ este mărginită în Y, de unde rezultă că mulţimea $(T \circ S)(B_X)$ este relativ compactă în Z.

Dacă $S \in K(X, Y)$ şi $T \in LC(Y, Z)$, atunci mulţimea $\text{cl}(S(B_X))$ este compactă în Y, de unde se obţine că mulţimea $\text{cl}(T(S(B_X))) = T(\text{cl}(S(B_X)))$ este compactă în Z. □

TEOREMA 2. Fie $A \in$ K(X). Atunci au loc următoarele afirmaţii:
a) $N(I - A)$ este finit dimensional.
b) $\text{Im}(I - A)$ este închis.
c) $N(I - A) = \{0\} \iff \text{Im}(I - A) = X$.

Demonstraţie. A se vedea [2, Theorem 6.6]. □

OBSERVAŢIA 3. Proprietatea c) este cunoscută în dimensiune finită. Dacă $\dim X < \infty$, atunci un operator liniar de la X în el însuşi este injectiv dacă şi numai dacă el este surjectiv.

Dacă $\dim X = \infty$, atunci un operator $A \in LC(X)$ poate fi injectiv fără a fi surjectiv şi invers. Exemple în acest sens sunt operatorii shift la dreapta, respectiv shift la stânga (a se vedea Exemplul 3).

Concluzia c) exprimă deci o proprietate remarcabilă a operatorilor de forma $I - A$ cu $A \in K(X)$.

3. ANALIZĂ SPECTRALĂ

Considerăm în continuare X un spaţiu Banach real.

Vom începe cu câteva definiţii importante.

DEFINIŢIA 3. Fie $A \in LC(X)$.

Mulţimea rezolvantă $\rho(A)$ a operatorului A se defineşte prin

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (A - \lambda I) \text{ este bijectiv de la } X \text{ în } X\}.$$

Spectrul σ(A) al operatorului A este complementara mulţimii rezolvante, adică

$$\sigma(A) = \mathbb{R} \backslash \rho(A).$$

Un număr real λ se numeşte **valoare proprie** a lui A dacă

$$N(A - \lambda I) \neq \{0\}.$$

În acest caz, mulţimea $N(A - \lambda I)$ se numeşte **spaţiul propriu** asociat lui λ. Mulţimea tuturor valorilor proprii ale operatorului A se notează cu $EV(A)$.

Menţionăm că dacă $\lambda \in \rho(A)$, atunci $(A - \lambda I)^{-1} \in LC(X)$.

OBSERVAŢIA 4. Evident, $EV(A) \subseteq \sigma(A)$.
În general, incluziunea este strictă: este posibil să existe $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$N(A - \lambda I) = \{0\} \text{ şi } \mathrm{Im}(A - \lambda I) \neq X$$

(un asemenea λ aparţine spectrului, dar nu este valoare proprie).
Aşa cum se va arăta în Exemplul 3, operatorul shift la dreapta $S_r \colon l^2 \to l^2$ are proprietăţile $0 \in \sigma(A)$ şi $0 \notin EV(A)$.

PROPOZIŢIA 3. Fie $A \in LC(X)$. Atunci spectrul $\sigma(A)$ al operatorului A este o mulţime compactă şi are loc incluziunea

$$\sigma(A) \subseteq [-\|A\|, \|A\|].$$

Demonstraţie. A se vedea [2, Proposition 6.7]. □

EXEMPLUL 2. Fie $X = l^p$, $1 \leq p \leq \infty$, şi $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un şir mărginit de numere reale. Fie $M \in LC(X)$ operatorul multiplicativ definit în Exemplul 1. Ne propunem să determinăm $EV(M)$ şi $\sigma(M)$.

Rezolvare. Căutăm $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $M - \lambda I$ să nu fie injectiv, adică $N(M - \lambda I) \neq \{0_X\}$. Observăm că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, luând $\lambda = \lambda_n$ şi $x = (0, ...0, 1, 0, ...) \in X \setminus \{0_X\}$ (unde 1 este pe a n-a poziţie în şirul x), avem $Mx - \lambda x = 0$. Aşadar λ_n este o valoare proprie a lui M, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. Avem deci că

$$\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\} \subseteq EV(M).$$

Arătăm că $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$ sunt singurele valori proprii ale lui M, adică dovedim incluziunea

$$EV(M) \subseteq \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}.$$

Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ o valoare proprie a lui M, $\lambda \neq \lambda_i$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$. Atunci există $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in X \setminus \{0_X\}$ astfel ca $Mx - \lambda x = 0$, deci

$$(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...) = (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...).$$

Cum $x \neq 0_X$, există $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lambda = \lambda_i$, contradicţie. Aşadar are loc egalitatea

$$EV(M) = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...\}.$$

Determinăm, în continuare, spectrul $\sigma(M)$. Cum $EV(M) \subseteq \sigma(M)$, iar $\sigma(M)$ este închis (conform Propoziţiei 3), are loc incluziunea

$$\mathrm{cl}\, EV(M) \subseteq \sigma(M).$$

Arătăm că are loc şi incluziunea

$$\sigma(M) \subseteq \mathrm{cl}\, EV(M).$$

Presupunem, prin reducere la absurd, că nu are loc incluziunea de mai sus. Fie $\alpha \in \sigma(M)$ astfel încât $\alpha \notin \operatorname{cl} EV(M)$. Atunci $d(\alpha, EV(M)) > 0$. Fie $a > 0$ astfel încât $|\alpha - \lambda_n| \geq a$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Arătăm că operatorul $M - \alpha I$ este surjectiv. Fie $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in l^p$. Atunci

$$x' = \left(\frac{x_1}{\lambda_1 - \alpha}, \frac{x_2}{\lambda_2 - \alpha}, ..., \frac{x_n}{\lambda_n - \alpha}, ... \right) \in l^p,$$

deoarece $\left| \frac{1}{\lambda_n - \alpha} \right| \leq \frac{1}{a}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$. De asemenea, $Mx' - \alpha x' = x$, ceea ce dovedeşte surjectivitatea operatorului $M - \alpha I$.

Cum $\alpha \notin EV(M)$, operatorul $M - \alpha I$ este şi injectiv, deci bijectiv, contradicţie cu faptul că $\alpha \in \sigma(M)$. Aşadar, $\sigma(M) = \operatorname{cl} EV(M)$. $\square$

Exemplul 3. **(Proprietăţi spectrale ale operatorilor shift)**

Fie $X = l^2$. Operatorii **left shift** $S_l \colon X \to X$ şi **right shift** $S_r \colon X \to X$ sunt definiţi pentru un vector $x \in X$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...)$, prin

$$S_l x = (x_2, x_3, ..., x_{n+1}, ...),$$

respectiv

$$S_r x = (0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ...).$$

Se verifică faptul că $\|S_l\| = \|S_r\| = 1$.
Vom arăta că:
(1) $S_l, S_r \notin K(X)$.
(2) $EV(S_r) = \phi$.
(3) $\sigma(S_r) = [-1, 1]$.
(4) $EV(S_l) = (-1, 1)$.
(5) $\sigma(S_l) = [-1, 1]$.

Demonstraţie. (1) Observăm că $S_l \circ S_r = I$. Întrucât X nu este finit dimensional, operatorul I nu este compact. Conform Propoziţiei 2, avem că $S_l \notin K(X)$ şi $S_r \notin K(X)$.

(2) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $S_r - \lambda I$ nu este injectiv. Atunci există $x \in X$, $x \neq 0_X$, astfel încât $S_r x - \lambda x = 0_X$, adică

$$(0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ...) - (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...) = 0_X,$$

de unde se obţine

$$\lambda x_1 = 0,\ \lambda x_2 = x_1,\ \lambda x_3 = x_2, ..., \lambda x_n = x_{n-1}, ...$$

Cum $\lambda x_1 = 0$, avem fie $\lambda = 0$, fie $x_1 = 0$. Dacă $\lambda = 0$, rezultă că S_r nu este injectiv, contradicţie. Dacă $\lambda \neq 0$ şi $x_1 = 0$, atunci $x_2 = x_3 = ... = x_n = ... = 0$, contradicţie cu $x \neq 0_X$. Aşadar, $EV(S_r) = \emptyset$.

(3) Arătăm mai întâi că pentru orice $\lambda \in [-1,1]$ operatorul $S_r - \lambda I$ nu este surjectiv. Fie $\lambda \in [-1,1]$ arbitrar ales. Dovedim că pentru $f = (-1,0,0,...) \in X$ ecuaţia $S_r x - \lambda x = f$ nu are soluţie în X. Presupunem, prin absurd, că ecuaţia are o soluţie $x \in X$. Atunci

$$(1) \qquad (0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, ...) - (\lambda x_1, \lambda x_2, ..., \lambda x_n, ...) = (-1, 0, 0, ...).$$

Rezultă că $\lambda \neq 0$. Făcând identificarea pe componente în (1), obţinem

$$x_1 = \frac{1}{\lambda},\ x_2 = \frac{1}{\lambda^2},\ x_3 = \frac{1}{\lambda^3}, ..., x_n = \frac{1}{\lambda^n}, ...,$$

deci

$$x = \left(\frac{1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\lambda^3}, ..., \frac{1}{\lambda^n}, ...\right).$$

Dar $x \notin X$, pentru că $\lambda \in [-1,1]$. Contradicţia obţinută arată că operatorul $S_r - \lambda I$ nu este surjectiv.

Din cele de mai sus rezultă incluziunea $[-1,1] \subseteq \sigma(S_r)$. Propoziţia 3 implică

$$\sigma(S_r) \subseteq [-\|S_r\|, \|S_r\|] = [-1,1].$$

Aşadar $\sigma(S_r) = [-1,1]$.

(4) Fie $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\lambda| < 1$. Faptul că $S_l - \lambda I$ nu este injectiv rezultă din faptul că pentru

$$x = (1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^n, ...) \in X \setminus \{0_X\}$$

are loc egalitatea $S_l x - \lambda x = 0$.

Fie acum $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $|\lambda| \geq 1$. Presupunem, prin absurd, că $S_l - \lambda I$ nu este injectiv. Atunci există $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in X,\ x \neq 0_X$, astfel încât $S_l x - \lambda x = 0_X$. Explicit, avem

$$(x_2, x_3, x_4, ..., x_{n+1}, ...) - (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, ..., \lambda x_n, ...) = 0_X,$$

de unde rezultă

$$x = x_1(1, \lambda, \lambda^2, ..., \lambda^{n-1}, ...) \notin X,$$

contradicţie. Avem aşadar că $EV(S_l) = (-1,1)$.

(5) Din *(4)* avem că $(-1,1) = EV(S_l) \subseteq \sigma(S_l)$. Pe de altă parte, ştim că spectrul este o mulţime închisă (Propoziţia 3), deci $[-1,1] \subseteq \sigma(S_l)$. Tot din Propoziţia 3 rezultă că

$$\sigma(S_l) \subseteq [-\|S_l\|, \|S_l\|] = [-1,1].$$

Aşadar $\sigma(S_l) = [-1,1]$. □

Teorema 3. Fie $A \in K(X)$, unde $\dim X = \infty$. Atunci:
a) $0 \in \sigma(A)$,
b) $\sigma(A) \backslash \{0\} = EV(A) \backslash \{0\}$,
c) are loc una dintre situaţiile următoare:
- fie $\sigma(A) = \{0\}$,
- fie $\sigma(A) \backslash \{0\}$ este o mulţime finită,
- fie $\sigma(A) \backslash \{0\}$ este un şir care tinde la 0.

Demonstraţie. A se vedea [2, Theorem 6.8]. □

Observaţia 5. Ca şi o ilustrare a Teoremei 3, considerăm cazul în care operatorul multiplicativ M definit în Exemplul 1 este compact. Pe baza condiţiei de compactitate din acest exemplu precum şi din cele arătate în cadrul Exemplului 2, rezultă egalitatea

$$\sigma(M) = EV(M) \cup \{0\}.$$

Exemplul 4. Fie $X = l^2$ şi operatorul **right shift** definit în Exemplul 3. Considerăm operatorul multiplicativ $M\colon X \to X$ definit pentru $x = (x_n) \in X$ prin

$$Mx = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n, ...),$$

unde (λ_n) este un şir mărginit de numere reale.

Vom determina mai întâi $EV(S_r \circ M)$. Presupunând apoi că $\lambda_n \to \lambda$ când $n \to \infty$, vom arăta că $\sigma(S_r \circ M) = [-|\lambda|, |\lambda|]$.

Rezolvare. Fie $\mu \in \mathbb{R}$ astfel încât $(S_r \circ M)(x) - \mu x = 0$, unde $x \in X$, $x \neq 0_X$, adică

$$(0, \lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_{n-1} x_{n-1}, ...) - (\mu x_1, \mu x_2, ..., \mu x_n, ...) = 0_X.$$

Obţinem că

$$\mu x_1 = 0,\ \lambda_1 x_1 = \mu x_2,\ \lambda_2 x_2 = \mu x_3, ..., \lambda_{n-1} x_{n-1} = \mu x_n, ...$$

Dacă $\mu = 0$, cum $x \neq 0_X$, rezultă că există $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lambda_i = 0$. Dacă $\mu \neq 0$, atunci $x_1 = x_2 = ... = x_n = ... = 0$, adică $x = 0_X$, contradicţie.

Aşadar, dacă există $i \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\lambda_i = 0$, atunci $EV(S_r \circ M) = \{0\}$. Altfel, adică dacă $\lambda_i \neq 0$ pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, avem $EV(S_r \circ M) = \phi$.

Presupunem în continuare că $\lambda_n \to \lambda$ când $n \to \infty$. Dacă $\lambda = 0$, din Exemplul 1 şi Propoziţia 2 rezultă compactitatea operatorului $S_r \circ M$. Teorema 3 implică atunci că $\sigma(S_r \circ M) \backslash \{0\} = EV(S_r \circ M) \backslash \{0\}$ şi $0 \in \sigma(S_r \circ M)$, deci $\sigma(S_r \circ M) = \{0\}$.

Presupunem acum că $\lambda \neq 0$. Notăm $A := S_r \circ M$. Vom arăta că $A - \mu I$ este bijectiv pentru orice μ cu $|\mu| > |\lambda|$. Fie μ un număr real astfel ca $|\mu| > |\lambda|$. Din cele arătate mai sus rezultă că operatorul $A - \mu I$ este injectiv. Vom dovedi că el este şi surjectiv. Pentru aceasta, observăm mai întâi că operatorul M se poate scrie ca $M = \lambda I + K$, unde $K\colon X \to X$ este un operator compact (conform Exemplului 1). Obţinem astfel că $A = \lambda S_r + K_1$ şi

$$A - \mu I = (\lambda S_r - \mu I) + K_1 = J \circ (I + K_2),$$

unde $J = \lambda S_r - \mu I$ e bijectiv (conform afirmaţiei *(3)* din Exemplul 3), iar K_1, $K_2\colon X \to X$ sunt operatori compacţi. Injectivitatea operatorului $A - \mu I$ o implică în mod evident pe cea a operatorului $I + K_2$. Aplicând afirmaţia *c)* a Teoremei 2 operatorului $I + K_2$, rezultă că acest operator este surjectiv. Pentru că şi operatorul J este surjectiv, rezultă surjectivitatea operatorului $J \circ (I + K_2) = A - \mu I$. Prin urmare, $\mu \in \rho(A)$.

Vom arăta în continuare că operatorul $A - \mu I$ nu este bijectiv dacă $|\mu| \leq |\lambda|$. Fie μ un număr real astfel ca $|\mu| \leq |\lambda|$. Presupunem, prin reducere la absurd, că $A - \mu I$ este bijectiv. Scriem

$$S_r - \frac{\mu}{\lambda} I = \frac{1}{\lambda}(A - \mu I) - \frac{1}{\lambda} K_1 = J' \circ (I + K_3),$$

unde $J' = \frac{1}{\lambda}(A - \mu I)$ este bijectiv, iar $K_3\colon X \to X$ este compact. Afirmaţia *(2)* din Exemplul 3 implică injectivitatea operatorului $S_r - \frac{\mu}{\lambda} I$, de unde rezultă că şi operatorul $I + K_3$ este injectiv. Aplicând încă o dată afirmaţia *c)* a Teoremei 2, concluzionăm că operatorul $I + K_3$ este surjectiv. Prin urmare, şi operatorul $J' \circ (I + K_3) = S_r - \frac{\mu}{\lambda} I$ este surjectiv. Rezultă că $\frac{\mu}{\lambda} \in \rho(S_r)$, ceea ce contrazice afirmaţia *(3)* din cadrul Exemplului 3. Contradicţia obţinută dovedeşte că $\mu \in \sigma(A)$. În concluzie, $\sigma(S_r \circ M) = [-|\lambda|, |\lambda|]$. □

BIBLIOGRAFIE

[1] W.W. BRECKNER: *Analiză funcţională*, Presa Universitară Clujeană, 2009.

[2] H. BREZIS: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2011.

Faculty of Mathematics and Computer Science
“Babeş-Bolyai” University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: luminitajarda@yahoo.com