DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 38 (2020), pp. 45–53

ABORDARE SISTEMATICĂ PRIN INTEREMEDIUL SISTEMELOR DE ECUAŢII LINIARE A UNOR PROBLEME DE CICLU PRIMAR

Eduard Ştefan Grigoriciuc

Rezumat. In this paper we present a problem taken from the National Competition “Gazeta Matematică Junior 2015 - clasa a II-a”. We discuss the problem in the context of systems of linear equations and we solve the system obtained using Gauss's Method. We also present some remarks related to the existence and the form of the solutions. In the final section we propose another form of the problem with stronger hypotheses.

MSC 2000. 11C20, 15A06

Cuvinte cheie. Systems of linear equations, Gaussian elimination method.

1. PRELIMINARII

Fie K un corp comutativ. Un sistem de ecuaţii de forma

$$(1)\qquad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \quad ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

unde $a_{ij} \in K$ şi $b_j \in K$ pentru $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ şi $x_1, ..., x_n$ sunt necunoscute se numeşte *sistem de ecuaţii liniare cu m ecuaţii şi n necunoscute* (vezi [2] sau [3]). Matricea

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n}(K)$$

se numeşte *matricea sistemului*, iar matricea

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m,n+1}(K)$$

obţinută prin adăugarea coloanei formată din termenii liberi ai sistemului (1) se numeşte *matricea extinsă a sistemului.* Pentru a rezolva un sistem de forma (1) se pot folosi mai multe metode (vezi [2]) dintre care menţionăm (şi folosim în lucrarea de faţă) *Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare.*

Observaţia 1. Metoda lui Gauss (metoda eliminării succesive) este metoda prin care un sistem de forma (1) este transformat într-un sistem echivalent (cu aceeaşi mulţime de soluţii) de formă *triunghiulară* sau *trapezoidală* prin transformări elementare asupra liniilor sau a coloanelor.

Observaţia 2. Numim transformări elementare asupra liniilor (coloanelor) unei matrici A următoarele:

- permutarea a două linii (coloane) ale lui A;
- înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un scalar nenul;
- înmulţirea unei linii (coloane) ale lui A cu un scalar şi adunarea la altă linie (coloană).

2. PROBLEMA PROPUSĂ

Prezentăm în cele ce urmează o problemă extrasă din subiectele de clasa a II-a propuse la *Concursul Naţional Gazeta Matematică Junior – Etapa I* (vezi [1, Problema 3]).

Problema 1. Scrieţi numerele naturale de la 1 la 9 în casetele libere, astfel încât cele opt egalităţi scrise pe liniile orizontale şi pe coloane să fie corecte:

7	+		-		=	**5**
+	■	-	■	+	■	+
	-	**2**	+		=	
-	■	+	■	-	■	-
	+		-		=	**6**
=	■	=	■	=	■	=
5	+	**5**	-		=	**7**

Figura. 2.1 – Problema 1

Observaţia 3. În rezolvarea Problemei 1 se pot discuta următoarele două cazuri:

(1) cifrele scrise în casetele libere apar fiecare o singură dată;
(2) cifrele scrise în casetele libere se pot repeta cel puţin o dată.

Deşi în enunţul problemei nu este specificat cazul în care lucrăm, vom prezenta o demonstraţie care ilustrează faptul că în cazul (1) problema nu are soluţii, iar în cazul (2) problema are exact 4 soluţii.

Demonstraţie. Vom rezolva mai întâi Problema 1 fără a ţine cont de restricţiile asupra cifrelor impuse mai sus. Tabelul din Figura 2.1 poate fi văzut ca un sistem de 8 ecuaţii cu 9 necunoscute (notate aici $x_1, x_2, ..., x_9$) pe care îl vom rezolva folosind *Metoda lui Gauss.*

7	+	x_1	-	x_2	=	**5**
+		-		+		+
x_3	-	**2**	+	x_4	=	x_5
-		+		-		-
x_6	+	x_7	-	x_8	=	**6**
=		=		=		=
5	+	**5**	-	x_9	=	**7**

Figura. 2.2 – Notaţie - Problema 1

Folosind notaţiile din Figura 2.2, obţinem sistemul

$$(2) \qquad (S_0): \begin{cases} 7 + x_1 - x_2 = 5 \\ x_3 - 2 + x_4 = x_5 \\ x_6 + x_7 - x_8 = 6 \\ 5 + 5 - x_9 = 7 \\ 7 + x_3 - x_6 = 5 \\ x_1 - 2 + x_7 = 7 \\ x_2 + x_4 - x_8 = x_9 \\ 5 + x_5 - 6 = 7 \end{cases}$$

Fie vectorul

$$x = \big(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\big),$$

unde $x_k \in \mathbb{N}$ cu $1 \leq x_k \leq 9$, $k = \overline{1,9}$ soluţia sistemului (S_0). Sistemul se poate rescrie într-o formă echivalentă

$$(3) \qquad (S): \left\{ \begin{array}{lllllllll} x_1 - x_2 & & & & & & & = -2 \\ & x_3 + x_4 - x_5 & & & & & & = 2 \\ & & & x_6 + x_7 - x_8 & & & & = 6 \\ & & & & & & x_9 & = 3 \\ & x_3 & & - x_6 & & & & = -2 \\ x_1 & & & & + x_7 & & & = 7 \\ x_2 & + x_4 & & & & - x_8 & - x_9 & = 0 \\ & & x_5 & & & & & = 8 \end{array} \right.$$

din care se obţin imediat $x_5 = 8$ şi $x_9 = 3$. Dacă eliminăm cele două componente x_5 şi x_9, putem construi un nou sistem (S_y) cu necunoscutele $y_1, y_2, ..., y_7$, unde

$$y = \big(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7\big) = \big(x_1, x_2, x_3, x_4, x_6, x_7, x_8\big)$$

şi

$$(4) \qquad x = \big(y_1, y_2, y_3, y_4, 8, y_5, y_6, y_7, 3\big)$$

Astfel, obţinem un sistem de 6 ecuaţii cu 7 necunoscute

$$(5)\qquad (S_y):\begin{cases} y_1 - y_2 = -2 \\ y_3 + y_4 = 10 \\ y_5 + y_6 - y_7 = 6 \\ y_3 - y_5 = -2 \\ y_1 + y_6 = 7 \\ y_2 + y_4 - y_7 = 3 \end{cases}$$

Vom rezolva sistemul (S_y) folosind *Metoda lui Gauss de rezolvare a sistemelor de ecuaţii liniare* (vezi [3, Capitolul IV, Secţiunea 3.4] sau [2, Capitolul 4, Secţiunea 4.3]). Matricea extinsă a sistemului (S_y) este

$$\overline{M} = \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Asupra acestei matrici efectuăm următoarele transformări elementare:

- înmulţim **linia 1** cu -1 şi o adunăm la **linia 5**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- permutăm **linia 2** cu **linia 5**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- înmulţim **linia 2** cu -1 şi o adunăm la **linia 6**

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- permutăm **linia 3** cu **linia 4**

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- înmulţim **linia 3** cu -1 şi o adunăm la **linia 5**

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- permutăm **linia 4** cu **linia 5**

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- înmulţim **linia 4** cu -1 şi o adunăm la **linia 6**

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -18\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- înmulţim **linia 5** cu 1 şi o adunăm la **linia 6**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obţinem, în final, sistemul

$$(S'_y) : \begin{cases} y_1 - y_2 = -2 \\ y_2 + y_6 = 9 \\ y_3 - y_5 = -2 \\ y_4 + y_5 = 12 \\ y_5 + y_6 - y_7 = 6 \\ -2y_7 = -12 \end{cases} \tag{6}$$

Efectuând calculele pe

- **linia 6**, obţinem
$$y_7 = 6$$
- **linia 5**, obţinem
$$y_5 = 6 - y_6 + y_7 = 6 - y_6 + 6 = 12 - y_6$$
- **linia 4**, obţinem
$$y_4 = 12 - y_5 = 12 - (12 - y_6) = y_6$$
- **linia 3**, obţinem
$$y_3 = -2 + y_5 = -2 + (12 - y_6) = 10 - y_6$$
- **linia 2**, obţinem
$$y_2 = 9 - y_6$$
- **linia 1**, obţinem
$$y_1 = -2 + y_2 = -2 + (9 - y_6) = 7 - y_6$$

Aşadar, soluţia sistemului (S'_y) este

$$y = \big(7 - y_6, 9 - y_6, 10 - y_6, y_6, 12 - y_6, y_6, 6\big).$$

De asemenea, y este soluţia sistemului (S_y). Revenind la problema iniţială, avem că

$$x = \big(7 - y_6, 9 - y_6, 10 - y_6, y_6, 8, 12 - y_6, y_6, 6, 3\big)$$

$$x = \big(7 - x_7, 9 - x_7, 10 - x_7, x_7, 8, 12 - x_7, x_7, 6, 3\big) \tag{7}$$

este soluţia sistemului (S), unde $x_7 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 \leq x_7 \leq 9$. $\square$

3. CONCLUZII

OBSERVAŢIA 4. Din relaţia (7) se observă că x_7 apare atât pe poziţia **a patra**, cât şi pe poziţia **a şaptea** în vectorul soluţie x. Prin urmare, nu există **nicio soluţie** a sistemului în care cifrele cerute în Problema 1 să apară o singură dată.

OBSERVAŢIA 5. Tot din relaţia (7) obţinem următoarele **4 soluţii**:

$$x = \big(4, 6, 7, 3, 8, 9, 3, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 3$$
$$x = \big(3, 5, 6, 4, 8, 8, 4, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 4$$
$$x = \big(2, 4, 5, 5, 8, 7, 5, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 5$$
$$x = \big(1, 3, 4, 6, 8, 6, 6, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 6$$

în care cifrele *se repetă cel puţin o dată.* Având în vedere condiţiile $7 - x_7 > 0$ şi $12 - x_7 \leq 9$, nu există alte soluţii în afară de cele prezentate mai sus.

OBSERVAŢIA 6. Pe de altă parte, dacă în enunţul Problemei 1 se face modificarea *numerele naturale de la 0 la 9* (adică includem şi cifra 0), atunci Problema 1 are **exact 5 soluţii** în care cifrele se repetă cel puţin o dată. Acestea sunt

$$x = \big(4, 6, 7, 3, 8, 9, 3, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 3$$
$$x = \big(3, 5, 6, 4, 8, 8, 4, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 4$$
$$x = \big(2, 4, 5, 5, 8, 7, 5, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 5$$
$$x = \big(1, 3, 4, 6, 8, 6, 6, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 6$$
$$x = \big(0, 2, 3, 7, 8, 5, 7, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 7$$

OBSERVAŢIA 7. O generalizare în care

(1) $x_1, ..., x_9 \in \mathbb{N}$ (sunt numere naturale) conduce la concluzia că Problema 1 are **exact** 8 **soluţii**:

$$x = \big(7, 9, 10, 0, 8, 12, 0, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 0$$
$$x = \big(6, 8, 9, 1, 8, 11, 1, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 1$$
$$x = \big(5, 7, 8, 2, 8, 10, 2, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 2$$
$$x = \big(4, 6, 7, 3, 8, 9, 3, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 3$$
$$x = \big(3, 5, 6, 4, 8, 8, 4, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 4$$
$$x = \big(2, 4, 5, 5, 8, 7, 5, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 5$$
$$x = \big(1, 3, 4, 6, 8, 6, 6, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 6$$
$$x = \big(0, 2, 3, 7, 8, 5, 7, 6, 3\big) \quad \text{pentru} \quad x_7 = 7$$

(2) $x_1, ..., x_9 \in \mathbb{Z}$ (sunt numere întregi) conduce la concluzia că Problema 1 are **o infinitate de soluţii**.

4. ALTERNATIVĂ LA PROBLEMA PROPUSĂ

PROBLEMA 2. Scrieţi numerele naturale de la 1 la 9 (**o singură dată**) în casetele libere, astfel încât cele opt egalităţi scrise pe liniile orizontale şi pe coloane să fie corecte:

2	+		-		=	**6**
+	■	-	■	+	■	+
	-		+	**4**	=	
-	■	+	■	-	■	-
	+		-		=	**6**
=	■	=	■	=	■	=
3	+		-	**1**	=	**3**

Figura. 4.3 – Problema 2

OBSERVAŢIA 8. Folosind o demonstraţie similară cu cea a Problemei 1, obţinem sistemul

$$(8)\qquad (S_2):\begin{cases} x_1 - x_2 = 4 \\ x_3 - x_4 - x_5 = -4 \\ x_6 + x_7 - x_8 = 6 \\ x_9 = 1 \\ x_3 - x_6 = 1 \\ x_1 - x_4 + x_7 - x_9 = 0 \\ x_2 - x_8 = -3 \\ x_5 = 3 \end{cases}$$

cu soluţia

$$(9)\qquad x = \big(1 + x_8, -3 + x_8, 3 + x_8, 4 + x_8, 3, 2 + x_8, 4, x_8, 1\big),$$

unde $x_8 \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $1 \leq x_8 \leq 9$. Pentru a obţine o soluţie în care cifrele să apară o singură dată este suficient să considerăm $x_8 = 5$. În cazul acesta, **unica soluţie** a Problemei 2 este

$$(10)\qquad x = \big(6, 2, 8, 9, 3, 7, 4, 5, 1\big).$$

OBSERVAŢIA 9. Alte soluţii ale Problemei 2 ar fi

$$x = \big(4, 0, 6, 7, 3, 5, 4, 3, 1\big) \quad \text{pentru} \quad x_8 = 3$$

$$x = \big(5, 1, 7, 8, 3, 6, 4, 4, 1\big) \quad \text{pentru} \quad x_8 = 4$$

în care cifrele *se repetă* cel puţin o dată şi sunt *cuprinse între 0 şi 9.*

BIBLIOGRAFIE

[1] Concursul Naţional Gazeta Matematică Junior, Etapa I – 22 Ianuarie 2015, Subiecte propuse la clasa a II-a.

[2] Breaz S., Pelea C., Purdea I., *Îndrumar pentru studenţii specializărilor Matematică şi Matematică-Informatică pentru pregătirea licenţei*, Cluj-Napoca, 2013.

[3] Burtea M, Burtea G., *Matematică - Manual pentru clasa a XI-a (M1)*, Editura Carminis, Piteşti, 2006.

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. M. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `eduard.grigoriciuc@ubbcluj.ro`