DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 38 (2020), pp. 21–32

ECLIPSELE DE LUNĂ PE ÎNŢELESUL ELEVILOR

Cristina GHEORGHE

Rezumat. Geometry has a broad applicability in astronomy, and eclipses catch people's interest even nowadays. This paper offers an explanation of these phenomena from a geometrical point of view, using elementar concepts accesible to an elementary school student.

MSC 2000. 97M50

Cuvinte cheie. geometry, astronomy, lunar eclipses

1. INTRODUCERE

Eclipsele sunt fenomene care au rămas mult timp neînţelese pe deplin, oamenii considerându-le fenomene supranaturale. Deşi sunt spectaculoase, eclipsele pot fi explicate uşor, având o mare aplicabilitate în geometrie.

Articolul de faţă îşi propune să explice modul în care se produc eclipsele de Lună, oferind astfel un exemplu practic în care se aplică o serie de concepte de bază ale geometriei. Partea teoretică este elaborată pe baza surselor [3], [4], [5], [6]. Ultima secţiune este destinată descrierii unei activităţi care poate fi realizată cu elevii. Alegerea exemplului şi efectuarea calculelor aparţin autorului articolului, diagrama fiind realizată pe baza algoritmului descris în sursa [2]. S-au folosit coordonatele ecliptice furnizate de sursa [1]. Reprezentările geometrice din articolul de faţă sunt, de asemenea, realizate de către autor, folosind softurile GeoGebra şi Paint3D.

2. NOŢIUNI PRELIMINARE

Definiţia 1. *Sfera cerească* reprezintă o sferă de rază egală cu unitatea, pe care sunt proiectate toate corpurile cereşti.

Principalele cercuri de referinţă pe sfera cerească sunt:

a) orizontul locului: reprezintă cercul mare perpendicular pe verticala locului (direcţia determinată de forţa de gravitaţie) şi conţine locul în care se află observatorul;
b) meridianul locului: este dat de cercul mare care conţine verticala locului şi direcţia axei de rotaţie a Pământului;
c) ecuatorul ceresc: este cercul mare perpendicular pe axa de rotaţie a Pământului şi care trece prin centrul Pământului;
d) ecliptica: cercul mare de pe sfera cerească (cercul care conţine centrul sferei) descris de mişcarea aparentă a Soarelui, observată de pe Pământ. Ecliptica intersectează planul ecuatorului ceresc după dreapta $\gamma\,\Omega$. Punctul γ se numeşte *punct vernal*, iar Ω *punct autumnal.*

Coordonate ecliptice (β, λ). *Coordonatele ecliptice* ale unui astru sunt *latitudinea* şi *longitudinea ecliptică*, notate cu simbolurile β, respectiv λ.

DEFINIŢIA 2. Ecliptica reprezintă cercul mare descris pe sfera cerească de drumul aparent al Soarelui în decurs de un an.

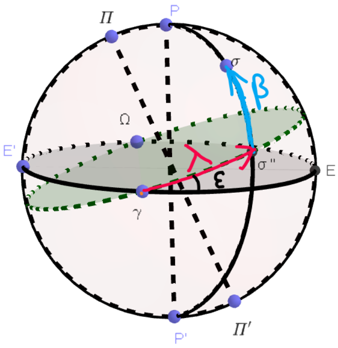

Figura. 2.1 – Reprezentarea coordonatelor ecliptice pe sfera cerească

Denumirea de ecliptică provine din faptul că eclipsele de Soare şi de Lună se produc atunci când Luna, în rotaţia sa în jurul Pământului se află în apropierea sau într-unul dintre nodurile eclipticii (punctele de intersecţie dintre planul orbitei Lunii şi planul eclipticii).

DEFINIŢIA 3. Latitudinea ecliptică a unui obiect de pe sfera cerească este arcul de cerc măsurat de la ecliptică la poziţia acelui obiect ceresc.

DEFINIŢIA 4. Longitudinea ecliptică reprezintă unghiul dintre meridianul ecliptic al punctului vernal γ şi meridianul ecliptic al astrului. Se măsoară pozitiv spre est.

DEFINIŢIA 5. Paralaxa diurnă a unui astru (sau, pe scurt, paralaxa unui astru) reprezintă unghiul sub care se vede din acel astru raza Pământului.

3. GEOMETRIA ECLIPSELOR DE LUNĂ

Eclipsele de Lună se produc atunci când Luna pătrunde în conul de umbră sau penumbră al Pământului. în figura de mai jos, este reprezentat geometric contextul în care se produc.

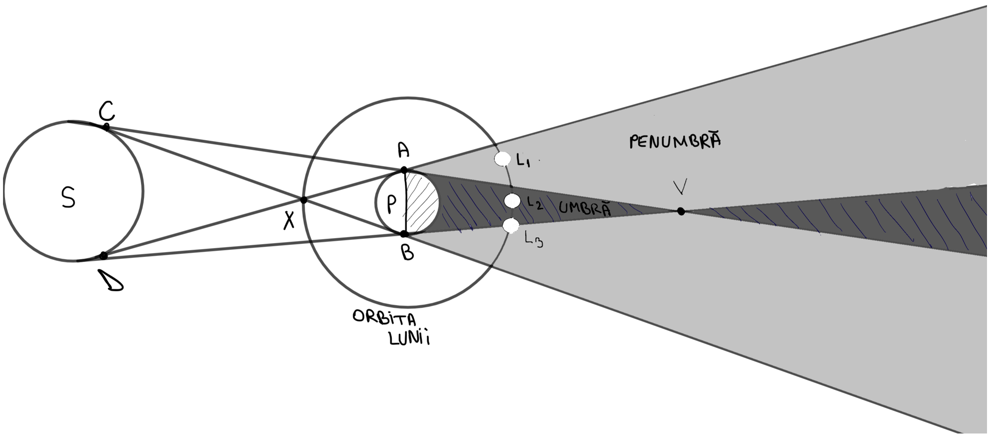

Figura. 3.2 – Reprezentarea eclipselor de Lună

Pentru a reprezenta modelul, am considetat cercurile de centre S şi T pentru Soare şi respectiv Pământ, iar L_1, L_2, L_3 trei poziţii posibile de pe orbita Lunii. Construind tangentele comune exterioare la cercurile S şi T, în partea opusă segmentului TS se formează un con de umbră având vârful în V. Construind tangentele interioare, se va obţine, prin acelaşi procedeu, un con de penumbră, aflat de aceeaşi parte a Pământului, înfăşurând conul de umbră. Atunci când Luna se află situată în întregime în conul de umbră (de exemplu în poziţia L_2 de pe orbita sa), spunem că are loc o eclipsă totală, iar când se află doar parţial în conul de umbră, are loc o eclipsă parţială (de exemplu, atunci când Luna se află în poziţia L_3).

Atunci când Luna se află în conul de penumbră, are loc o eclipsă prin penumbră, acest lucru observându-se sub forma strălucirii mai reduse a Lunii. O eclipsă totală se produce în mai multe etape: mai întâi, Luna pătrunde în conul de penumbră al Pământului, intensitatea sa luminoasă scăzând gradual, apoi pe măsură ce străbate conul de umbră, suprafaţa Lunii pare să fie acoperită dinspre est cu un disc întunecat. Odată ce Luna este intrată în conul de umbră, spunem că eclipsa este în faza de totalitate, iar Luna nu mai primeşte lumină de la Soare, culoarea sa devenind roşiatică. Acest fenomen se explică prin absorbţia selectivă a luminii de către atmosfera terestre, care reţine lumina albastră şi violet. După terminarea fazei de totalitate, se iveşte o margine strălucitoare a Lunii, iar aceasta revine treptat la strălucirea iniţială. O eclipsă totală de Lună poate dura aproximativ 5 ore (dintre care numai o oră durând faza de totalitate, când este învăluită complet în conul de umbră).

4. DETERMINAREA LUNGIMII CONULUI DE UMBRĂ

Pentru a verifica posibilitatea producerii unei eclipse de Lună, este necesar să determinăm lungimea conului de umbră al Pământului (lungime care va fi apoi comparată cu distanţa Pământ-Lună) şi grosimea acestui con. Grosimea conului oferă informaţii despre posibilitatea producerii unei eclipse totale de Lună.

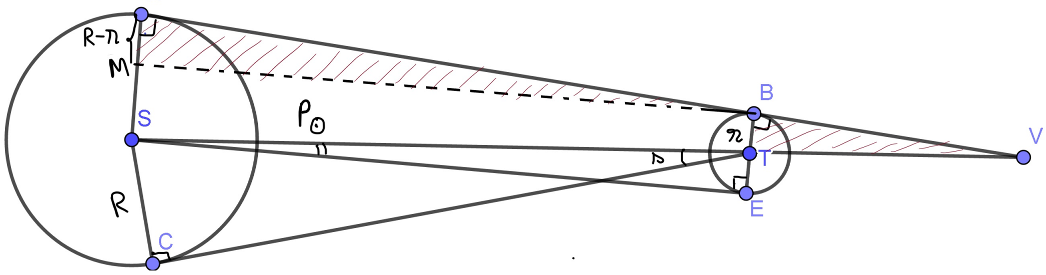

Figura. 4.3 – Determinarea lungimii h a conului de umbră

Notăm cu R raza Soarelui şi cu r pe cea a Pământului şi cu $P_\odot$ şi s paralaxa, respectiv semidiametrul aparent al Soarelui. Considerăm AB şi CE tangentele exterioare, iar SE şi SB tangentele interioare. Construim $BM||ST$. Fie $\Delta = ST$ distanţa Soare-Pământ şi $h = TV$ lungimea conului de umbră, pe care dorim să o determinăm.

Este cunoscut faptul că raza dusă în punctul de tangenţă este perpendiculară pe tangentă, deci $MA \perp AB$ şi $TB \perp AB$, deci $MA||TB$. Mai mult, din construcţie, $BM||ST$, deci în cele două triunghiuri se formează două perechi de unghiuri congruente: $\sphericalangle MBA \equiv \sphericalangle TVB$, fiind unghiuri corespondente, tăiate de secanta AV şi respectiv perechea de unghiuri $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle BTV$, care sunt complementele unghiurilor considerate anterior. Prin urmare, deducem că triunghiurile TBV şi MAB sunt asemenea Din rapoartele de asemănare pentru aceste două triunghiuri obţinem:

$$\frac{h}{\Delta} = \frac{r}{R-r} | \cdot \Delta \Leftrightarrow \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{r}{\frac{R}{\Delta} - \frac{r}{\Delta}}$$

Pe de altă parte, triunghiurile SCT şi SET sunt dreptunghice în C, respectiv E, Δ este ipotenuză, iar R, repsectiv r sunt catete în aceste triunghiuri. Prin urmare, se observă că

$$\frac{R}{\Delta} = \sin s$$

şi

$$\frac{r}{\Delta} = \sin P_\odot$$

Se cunosc raza Soarelui, $R = 696.000\ km$, raza Pământului, $r = 6.371\ km$ şi distanţa medie Soare-Pământ $\Delta = 1\ U.A = 149,6 \cdot 10^6\ km$. Prin urmare, valoarea semidiametrului aparent al Soarelui este

$$s = \arcsin \frac{696.000}{149,6 \cdot 10^6} = \arcsin 0,0046524 \approx 16' = 16 \cdot 60' = 960"$$

iar valoarea paralaxei este

$$P_\odot = \arcsin \frac{6.371}{149,6 \cdot 10^6} = \arcsin 4,258689 \cdot 10^{-5} \approx 9"$$

Deoarece unghiurile corespunzătoare semidiametrului aparent şi repsectiv paralaxei Soarelui sunt unghiuri mici, putem înlocui sinusurile acestor unghiuri cu valoarea unghiurilor exprimate în radiani. Prin urmare, ecuaţia (1) devine

$$h = \frac{r}{s - P_\odot}$$

Ţinând cont de valorile determinate, avem că

$$h = \frac{206265"}{960" - 9"} r \approx 217r$$

Se observă că lungimea obţinută pentru conul de umbră este mult mai mare decât distanţa de la Pământ la Lună (60 de raze terestre), prin urmare Luna poate trece prin conul de umbră al Pământului, dacă ne referim strict la depărtări. Facem precizarea că semidiametrul aparent şi paralaxa Soarelui variază, deoarece distanţa Soare-Pământ variază, iar în calcule au fost considerate valorile medii ale acestora.

5. DETERMINAREA SEMIDIAMETRULUI APARENT AL UMBREI PĂMÂNTULUI

Pentru a verifica posibilitatea ca Luna să intre în întregime în conul de umbră al Pământului (adică să aibă loc o eclipsă totală), se impun anumite condiţii legate de semidiametrele aparente ale umbrei şi respectiv penumbrei Pământului. În continuare, vom determina relaţia de calcul a semidiametrului aparent al umbrei (pe care îl vom nota cu simbolul ρ), în funcţie de paralaxa Lunii, paralaxa Soarelui şi semidiametrul aparent al acestuia. Vom reprezenta din nou geometric eclipsele de Lună şi vom considera Soarele S şi Pământul T dispuse ca în figura de mai jos.

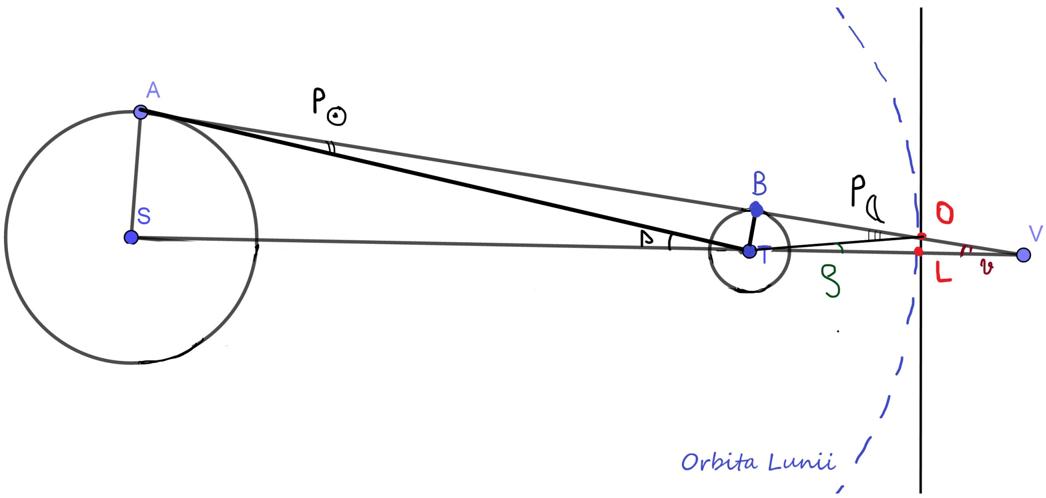

Figura. 5.4 – Determinarea semidiametrului aparent ρ al umbrei Pământului

Considerăm un plan perpendicular pe direcţia conului de umbră, plan situat la o depărtare egală cu distanţa Pământ-Lună. Considerăm O şi L punctele de intersecţie ale orbitei Lunii cu acest plan şi notăăm cu litera v unghiul $\sphericalangle BVT$, având vârful în vârful conului de umbră. Unghiul $\sphericalangle TOB$ fiind unghi exterior triunghiului ΔTOV, avem că

$$m(\sphericalangle TOB) = \rho + v \tag{2}$$

Dar, unghiul $\sphericalangle TOB$ este unghiul sub care se vede din O (poziţia Lunii) raza Pământului, prin urmare $\sphericalangle TOB$ este chiar paralaxa Lunii, iar relaţia (2) devine

(3) $$P_{☾} = \rho + v$$

Pe de altă parte, se remarcă faptul că unghiul $\sphericalangle TAB$ este unghiul din care este văzută din Soare raza Pământului, adică reprezintă de fapt paralaxa diurnă a Soarelui. Mai mult, se observă că unghiul $\sphericalangle AST$ (care este de altfel şi semidiametrul aparent s al Soarelui) este unghi exterior triunghiului ΔAVT deci

(4) $$s = P_{\odot} + v$$

Din relaţiile (3) şi (4) deducem că

$$s = P_{\odot} + P_{☾} - \rho$$

Deci semidiametrul aparent ρ al umbrei Pământului este dat de relaţia

(5) $$\rho = P_{\odot} + P_{☾} - s$$

6. DETERMINAREA SEMIDIAMETRULUI APARENT AL PENUMBREI PĂMÂNTULUI

În mod similar se poate determina semidiametrul aparent şi pentru conul de penumbră al Pământului. Considerăm şi de data aceasta Soarele centrat în S şi Pământul cu centrul în T, de asemenea construim un plan perpendicular pe direcţia conului de penumbră şi considerăm punctele L şi O' punctele de intersecţie ale orbitei Lunii cu acest plan, ca în figura 6.5 Vom nota cu σ semidiametrul aparent al conului de penumbră.

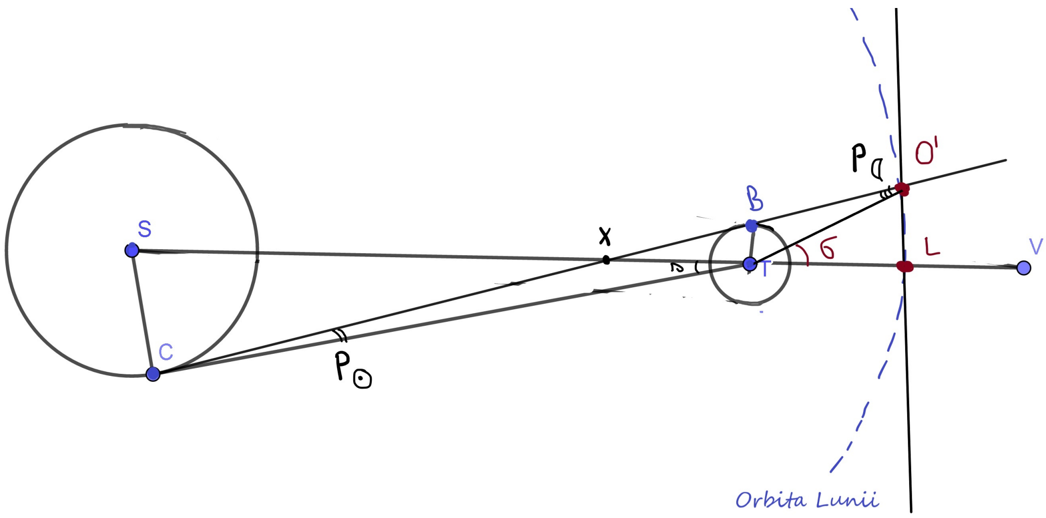

Figura. 6.5 – Determinarea semidiametrului aparent σ al penumbrei Pământului

Fie $\{X\} = BC \cap TS$. Observăm că σ, semidiametrul aparent al conului de penumbră, este unghi exterior triunghiului $\Delta O'TX$. Deci

$$\sigma = P_{☾} + m(\sphericalangle O'XT) \tag{6}$$

Dar, $\sphericalangle O'XT$ este, la rândul său unghi exterior triunghiului ΔTXC, deci

$$m(\sphericalangle O'XT) = P_{\odot} + s \tag{7}$$

Aşadar, din (6) şi (7) obţinem formula de calcul pentru semidiametrul aparent al penumbrei Pământului:

$$\sigma = P_{\odot} + P_{☾} + s \tag{8}$$

Observaţia 1. Considerând valorile medii pentru paralaxe şi pentru semidiametrul aparent al Soarelui, $P_{\odot} = 9"$, $P_{☾} = 3440"$, respectiv $s = 960"$ şi înlocuindu-le în (5) şi (8), obţinem

$$\rho = 3440" + 9" - 960" = 2489" = 41'29"$$

şi

$$\sigma = 3440" + 9" + 960" = 4409" = 1°13'29"$$

Cunoscând semidiametrul aparent mediu al Lunii ca fiind $s' = 937" = 15'37"$, se poate observa că $s' < \rho$ şi $s' < \sigma$, prin urmare Luna poate intra parţial sau în întregime atât în conul de penumbră, cât şi în cel de umbră. Am arătat că eclipsele de Lună sunt posibile ori de câte ori Luna nu trece mult prea jos de axa conului de umbră al Pământului. În continuare, ne vom ocupa de această condiţie, ca Luna să nu treacă prea jos sau prea sus în raport cu axa conului de umbră.

7. DETERMINAREA LATITUDINII GEOCENTRICE A LUNII

Presupunem corpurile S, T şi L situate ca în figură şi vom considera că axa conului de umbră este situată în planul eclipticii. Facem precizarea că L reprezintă poziţia Lunii şi este aleasă astfel încât discul său aparent să fie tangent la conul de umbră.

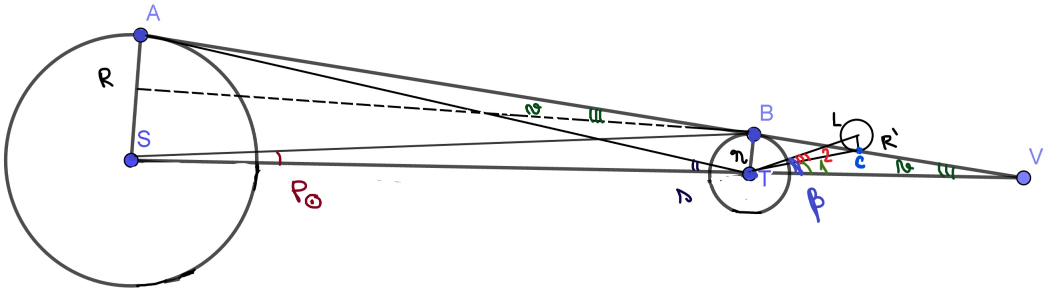

Figura. 7.6 – Determinarea latitudinii geocentrice a Lunii

Axa conului de umbră TV este inclusă în planul eclipticii, de aceea unghiul dintre axa TV și direcția spre centrul Lunii este latitudinea ecliptică geocentrică a Lunii, pe care o vom numi, pe scurt, latitudinea geocentrică a Lunii.

OBSERVAŢIA 2. Latitudinea geocentrică a Lunii delimitează cazurile în care sunt posibile eclipse de Lună.

De pe figură, se observă că unghiul β este alcătuit din unghiurile $\sphericalangle 1$ şi $\sphericalangle 2$, unde unghiul $\sphericalangle 2$ este chiar semidiametrul aparent s' al Lunii. Unghiul TCB, unghiul sub care se vede raza Pământului din punctul C, este unghi exterior al triunghiului CTV, de aceea, unghiul $\sphericalangle 1$ se calculează cu ajutorul relaţiei

$$\sphericalangle 1 = P_{☾} - v \tag{9}$$

Unghiul $\sphericalangle v$ se poate determina aplicând sinusul în triunghiul dreptunghic ΔTBV şi folosind aproximaţia $\sin v \approx v$, deoarece unghiul v este foarte mic:

$$\sin v \approx v = \frac{r}{TV} = \frac{R-r}{\Delta} = \frac{R}{\Delta} - \frac{r}{\Delta} = \sin s - \sin P_{\odot} = s - P_{\odot}$$

Reamintim că $\Delta = ST$, s este semidiametrul aparent al Soarelui, iar $P_{\odot}$ paralaxa Soarelui. Ultimele două mărimi reprezintă valori de unghiuri foarte mici, prin urmare poate fi aproximat sinusul pentru fiecare din aceste valori cu însăşi valorarea respectivă. Relaţia (9) va deveni

$$\sphericalangle 1 = P_{☾} + P_{\odot} - s \tag{10}$$

iar latitudinea geocentrică va fi dată de relaţia

$$\beta = P_{\odot} + P_{☾} - s + s' \tag{11}$$

Pentru a se produce o eclipsă totală de Lună, este necesar ca discul Lunii să fie tangent interior la conul de umbră sau în interiorul conului de umbră. Pentru ca discul Lunii să fie tangent conului de umbră, adică unghiul valoarea unghiului β obţinută prin relaţia (11) va trebui micşorată cu dublul semidiametrului aparent al Lunii, s'. Notând cu β_t latitudinea geocentrică a Lunii pentru care se produce eclipsă totală de Lună, vom obţine că

$$\beta_t < P_{\odot} + P_{☾} - s - s' \tag{12}$$

Pentru a se produce o eclipsă parţială de Lună prin umbră, este suficient ca discul Lunii să pătrundă parţial în conul de penumbră, adică valoarea latitudinii geoentrice β_p să fie mai mică decât valoarea obţinută în formula (11), adică

$$\beta_p < P_{\odot} + P_{☾} - s + s' \tag{13}$$

	Perigeu	Distanţa medie	Apogeu
$P_\odot$	9”	9”	9”
s	944”	960”	976”
$P_☾$	3682”	3440”	3236”
s’	1003”	937”	881”

Tabela 1 – Valori ale paralaxelor şi semidiametrelor lunare şi solare

Dacă înlocuim în relaţia (12) valorile la perigeu şi apogeu pentru paralaxele şi semidiametrele aparente ale Lunii şi Soarelui obţinem

$$\beta_t < 9” + 3682” - 944” - 1003” = 1744” = 29'4”$$

respectiv

$$\beta_t > 9” + 3236” - 976” - 881” = 1388” = 23'8”$$

Prin urmare, condiţia care se impune pentru ca o eclipsă de Lună să fie posibilă este ca $23'8” < \beta < 29'4”$.

Procedând analog pentru ecuaţia (13) obţinem

$$\beta_p < 60'32”$$

şi

$$\beta_p > 53'03”$$

Deci pentru ca o eclipsă parţială de Lună să se poată produce, este necesar ca $53'03” < \beta_p < 60'32”$

8. STUDIUL ECLIPSEI TOTALE DE LUNĂ DIN 26 MAI 2021

Pentru a studia eclipsa de Lună din 26 mai 2021, vom folosi datele din Anuarul Astronomic pentru anul 2021, mai exact longitudinea şi latitudinea ecliptică a Lunii, respectiv longitudinea şi latitudinea ecliptică a Soarelui (măsurate în grade), date care se găsesc în tabelul de mai jos.

Data	Ora	$\lambda_\odot$	$\beta_\odot$	$\lambda_☾$	$\beta_☾$
2021/05/26	00.00	64.979425	0.000132	238.306011	1.141701
2021/05/26	01.00	65.019423	0.000130	238.939374	1.084362
2021/05/26	02.00	65.059421	0.000129	239.572733	1.026888
2021/05/26	03.00	65.099418	0.000127	240.206075	0.969287
2021/05/26	04.00	65.139415	0.000125	240.839389	0.911568
2021/05/26	05.00	65.179411	0.000124	241.472663	0.853738
2021/05/26	06.00	65.219406	0.000122	242.105886	0.795806
2021/05/26	07.00	65.259401	0.000120	242.739045	0.737781
2021/05/26	08.00	65.299396	0.000119	243.372130	0.679670
2021/05/26	09.00	65.339390	0.000117	244.005129	0.621481
2021/05/26	10.00	65.379383	0.000115	244.638030	0.563224
2021/05/26	11.00	65.419376	0.000114	245.270821	0.504907
2021/05/26	12.00	65.459368	0.000112	245.903491	0.446537

Tabela 2 – Valori ale coordonatelor Lunii şi Soarelui, 26 mai 2021

Pentru a avea loc o eclipsă de Lună, este necesar ca Luna şi Soarele să se afle în opoziţie, adică unghiul dintre latitudinile geocentrice ale acestora să fie de aproximativ 180°. Vom considera data de 26 mai 2021, ora 10 : 00. La acest moment, avem următoarele valori

$$\lambda_{\odot} = 65.379383,\ \lambda_{☾} = 244.638030,\ \beta_{\odot} = 0.000115,\ \beta_{☾} = 0.563224,$$

Calculând $\lambda_{☾} - \lambda_{\odot}$ obţinem valoarea $179,258647$ (grade), prin urmare Luna se află la o diferenţă de 0.741353 grade de poziţia în care s-ar afla în opoziţie cu Soarele. Pentru a determina în cât timp ajunge în punctul în care s-ar afla în opoziţie, vom observa că longitudinea ecliptică a Lunii creşte cu $\Delta\beta_{☾} \approx 0.633$ grade/oră, iar cea a Soarelui cu $\Delta\beta_{\odot} \approx 0.03999$ grade pe oră. Diferenţa dintre aceste două valori este de aproximativ 0.59301 grade. Prin urmare, diferenţa de $0,741353$ grade va fi eliminată în 0.741353/0.59301 ore, adică în 1.25 ore. Aşadar, momentul la care Soarele, Pământul şi Luna formează un unghi de 180° este, aproximativ, ora 11 : 15. La (UTC)+3, 14 : 15, ora României, eclipsa de Lună nu a fost vizibilă de pe teritoriul ţării noastre.

Observaţia 3. Din tabel, se observă că la ora 11 : 00 (UTC), diferenţa $\lambda_{☾} - \lambda_{\odot}$ este de 179.851445, mult mai apropiată de valoarea căutată (180°). Procedând analog, se va obţine acelaşi moment la care cele două astre sunt în opoziţie.

Mai departe, vom determina, cu ajutorul unei metode intuitive, prezentată în cartea lui Duffet-Smith (vezi [2]), principalele momentele ale eclipsei de Lună (acolo unde a fost vizibilă). Metoda este simplă, accesibilă elevilor de gimnaziu. Pentru a deduce aceste momente, se va construi o diagramă a eclipselor. Desenăm mai întâi o linie orizontală, reprezentând planul eclipticii. Sub aceasta, vom considera o axă paralelă, care va determina momentele de timp şi pe care vom alege o unitate cu care se poate lucra uşor (de exemplu, 1 oră = 2 cm). Pe axă vom marca ora 11 : 00 şi alte câteva ore consecutive din vecinătatea acesteia. Pe ecliptică, vom marca punctul P la momentul la care Luna şi Soarele se află în opoziţie. Desenăm apoi cercuri concentrice, având centrul în P, ţinând cont de semidiametrul aparent al conului de umbră, respectiv penumbră. Valorile acestor mărimi sunt, conform [7],

$$\rho = 0.7719^\circ,\ \text{respectiv}\ \sigma = 1.2981^\circ$$

Ne amintim că diferenţa $\Delta\beta_{☾} - \Delta\beta_{\odot}$ era de aproximativ $0,593$ grade/oră. Pe axa pe care am marcat unităţile de timp, o oră corespundea lungimii de 2 cm, prin urmare, deducem că $0,593$ grade se pot reprezenta la scară prin aceeaşi unitate de măsură, 2 cm. Aplicând regula de trei simplă, se poate deduce că 1° va fi reprezentat pe diagramă prin 3.372 cm.

Pentru a reprezenta conul de penumbră, vom desena un cerc centrat în P şi având raza egală cu $1.2981 \cdot 3.372$ cm ≈ 4.377 cm, iar pentru conul de umbră vom construi un cerc cu raza de 2.6 cm. În continuare, vom reprezenta traiectoria Lunii în interiorul umbrei Pământului. Mai întâi, marcăm poziţia Q a Lunii la ora 10:00. Punctul Q se află la $0,563°$ deasupra eclipticii, adică, pe desen va fi reprezentat la o distanţă de $0,563 \cdot 3,372$ cm $\approx 1,9$ cm.

Vom mai reprezenta poziţia Lunii la un alt moment de timp, de exemplu două ore mai târziu, la 12:00 (UTC), poziţie pe care o vom nota cu R. Aceasta va fi dată de latitudinea ecliptică (vezi în tabel) la momentul de timp considerat, adică

$$\beta_{☾} = 0.446537°,$$

care pe desen va deveni $0.446537 \cdot 3.372$ cm ≈ 1.5 cm. Unind punctele Q şi R se va obţine traiectoria Lunii.

Pentru a putea reprezenta poziţia Lunii la orice moment de timp, este suficient să desenăm cercuri cu centrele pe dreapta RQ. Ţinând cont că semidiametrul aparent al Lunii este, conform tabelului, $s' \approx 0.26°$ (am considerat valoarea medie), raza acestor cercuri va fi de 0.88 cm.

Marcăm pe diagramă următoarele poziţii: M_1 (în care Luna pătrunde în conul de umbră), M_2 (când deja începe faza de totalitate), M_3 (când se termină această fază), şi M_4 (corespunzătoare momentului în care Luna părăseşte conul de umbră). Momentele de timp se determină de pe diagramă, folosind axa unităţilor de timp.

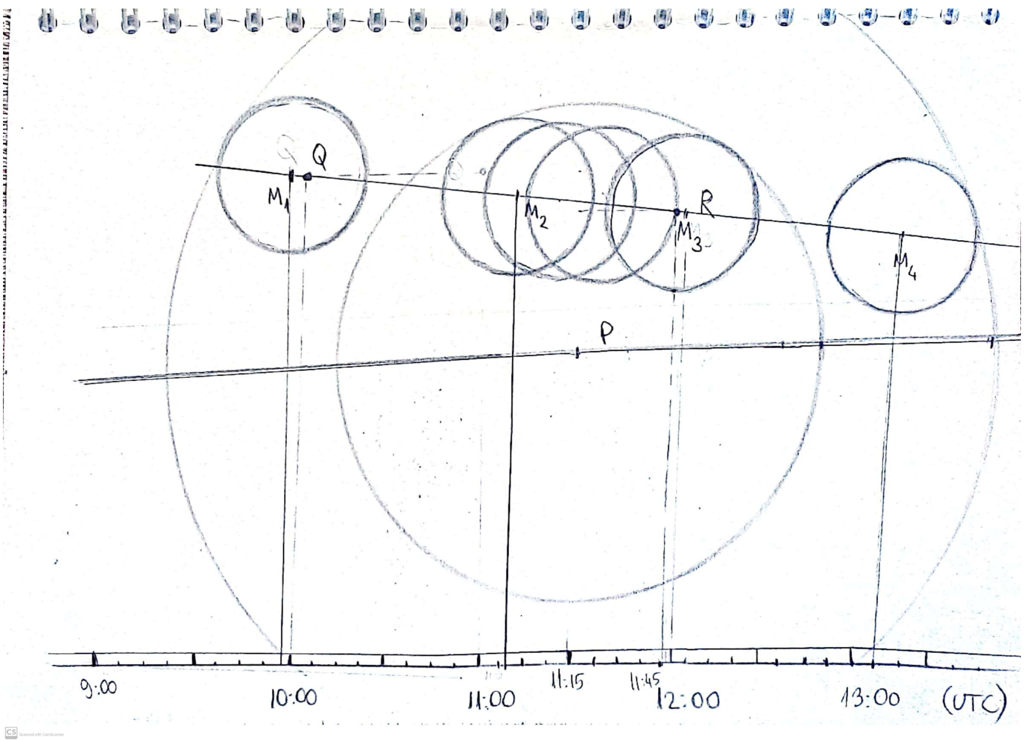

Figura. 8.7 – Diagrama eclipsei de Lună din 26 mai 2021

Comparând datele obţinute cu ajutorul diagramei, cu momentele reale ale eclipsei avem:

Poziţia	Moment obţinut	Moment real
M_1	9h 57m	9h 44m
M_2	11h 8m	11h 11m
M_3	11h 45m	11h 25m
M_4	13h 8m	12h 52m

Tabela 3 – Compararea valorilor obţinute cu cele reale, 26 mai 2021

În ciuda faptului că metoda este una simplă, intuitivă, au putut fi determinate aproximativ momentele de timp reale. Erorile mari obţinute pentru M_2 şi M_3 pot proveni din alunecarea liniarului pe hârtie la construirea paralelelor, din folosirea unui creion cu mina prea groasă sau din aproximaţiile repetate ale unităţilor de măsură. Cu toate acestea, însă, metoda oferă rezultate bune şi poate fi prezentată elevilor de gimnaziu.

BIBLIOGRAFIE

[1] *** Anuarul Astronomic, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2021;

[2] Duffet-Smith P., *Practical Astronomy with your Calculator*, Third edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1995;

[3] Mariş G., Ţifrea E., *Eclipsele*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1999;

[4] Seidelmann P. K., *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac. A revision to the Astronomical Ephemeris and The American Ephemeris and Nautical Almanac*, University Science Books, Mill Valley, California, 1992;

[5] Smart W.M., *Textbook on Spherical Astronomy, sixth edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 1977;

[6] Todoran I., *Eclipsele şi prevederea lor*, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1977;

[7] `http://www.eclipsewise.com`