

MODELE MATEMATICE CE PROVIN DIN CHIMIE

Oana-Georgiana TOMA

Abstract. Mathematical models for radioactive decay, chemical reactions, and dilution of a solution are often met in chemistry and physics. These are important because they can help us to predict what happens with the physics/chemistry phenomena in the future. This paper presents solutions to the models and graphic representations in each case.

MSC 2000. 34A05.

Key words. differential equations, mathematical models, chemistry.

1. INTRODUCERE

Modelele matematice sunt importante în lumea reală, deoarece cu ajutorul acestora se poate prezice evoluția unor fenomene. Acestea se pot aplica în mai multe domenii precum: dinamica populațiilor, fizică, economie, chimie, medicină etc.

În cadrul acestui articol se prezintă trei modele matematice din chimie: modelul dezintegrării radioactive care are ca aplicație datarea cu carbon, un model matematic care descrie reacțiile chimice și modelul care descrie diluarea unei soluții. Partea teoretică este însoțită de un set de exemple propuse în [1], [2], [3], [4], [6], soluțiile aparținând autorului lucrării.

Scopul lucrării este de a descrie modelele matematice prezentate mai sus. În studierea acestora s-au calculat punctele de echilibru și s-au realizat grafice și portrete fazice cu ajutorul soft-ului matematic Maple.

2. NOȚIUNI PRELIMINARII

DEFINIȚIA 1. [5] *O ecuație funcțională care are ca necunoscută o funcție și în expresia căreia apar și derivatele funcției necunoscute se numește **ecuație diferențială**.*

DEFINIȚIA 2. [5] *O funcție $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ se numește **soluție a ecuației diferențiale de ordinul întâi** dacă sunt îndeplinite următoarele condiții:*

- (i) $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval nedegenerat;
- (ii) $y \in C^1(I)$ și $(x, y(x)) \in D_f, \forall x \in I$;
- (iii) $y'(x) = f(x, y(x)), \forall x \in I$.

DEFINIȚIA 3. [5] *Graficul unei soluții se numește **curbă integrală** sau **curbă soluție**.*

Dacă y este o soluție în formă explicită atunci graficul ei este

$$G_y = \{(x, y(x)) : x \in I\}$$

DEFINIȚIA 4. [5] Fie ecuația diferențială de ordinul I

$$y' = f(x, y)$$

$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$. Printr-o **problemă Cauchy** sau **problemă cu valori inițiale** atașată ecuației de mai sus înțelegem problema

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

unde $(x_0, y_0) \in D_f$.

DEFINIȚIA 5. [6] Se spune că numărul real c se numește **punct de echilibru** (**punct critic** sau **punct staționar**) al unei ecuații diferențiale autonome, dacă el este un zero al funcției f , adică dacă $f(c) = 0$.

3. MODELE MATEMATICE GUVERNATE DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL I DIN CHIMIE

În continuare se prezintă modelele matematice din chimie: dezintegrarea radioactivă, modelarea reacțiilor chimice și diluarea unei soluții.

3.1. Dezintegrarea radioactivă. [[1], [3], [4], [6]] Dezintegrarea radioactivă este un proces care se referă la descompunerea unei substanțe cu o anumită viteză de dezintegrare într-un interval de timp dat. Acest model este folosit în aplicațiile biologice, fizice sau chimice pentru a determina timpul în care o anumită cantitate dintr-o substanță se dezintegrează.

Modelul dezintegrării radioactive este:

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = -r \cdot x$$

unde:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x'(t) = \text{viteza de dezintegrare} \\ x(t) &= \text{cantitatea de substanță la momentul } t \\ r &= \text{constantă de dezintegrare } (r > 0). \end{aligned}$$

Modelului dezintegrării radioactive i se poate atașa condiția inițială:

$$(2) \quad x(t_0) = x_0$$

unde:

$$x_0 = \text{cantitatea inițială } (x_0 > 0).$$

Ecuația diferențială (1) împreună cu condiția inițială (2) formează problema Cauchy:

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Prin metoda separării variabilelor se determină soluția generală a ecuației (1):

$$x(t) = C \cdot e^{-r \cdot t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Din condiția inițială (2) avem:

$$C = x_0 \cdot e^{r \cdot t_0}.$$

Soluția problemei Cauchy (3) este:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-r \cdot (t-t_0)}.$$

Funcția $x(t) = x_0 \cdot e^{-r \cdot (t-t_0)}$ descrie legea după care se dezintegrează substanța.

Cantitatea inițială de substanță care se dezintegrează este x_0 . Dacă considerăm momentul inițial $t_0 = 0$, atunci $x(t) = x_0 \cdot e^{-r \cdot t}$.

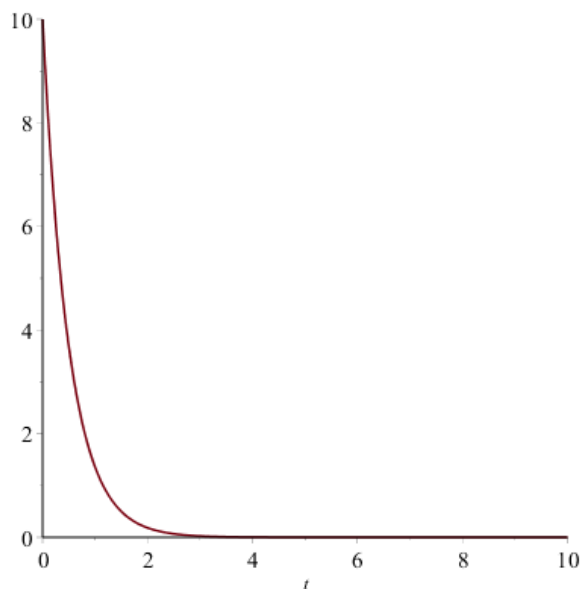


Figura. 3.1 – Graficul dezintegrării radioactive

Aplicație: Specific dezintegrării radioactive este **timpul de înjumătățire**, adică acel timp în care se dezintegrează jumătate din cantitatea inițială de substanță. Acesta poate fi folosit în aplicațiile biologice pentru a calcula în cât timp 50% dintr-un medicament este eliminat din corp prin excreție sau metabolism.

Pentru obținerea timpului de înjumătățire, considerăm problema Cauchy:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -r \cdot x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

cu soluția:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-r \cdot (t-t_0)}.$$

Calculăm timpul de înjumătățire $t_{1/2}$, rezolvând ecuația:

$$x(t_{1/2}) = \frac{x_0}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_0 \cdot e^{-r \cdot (t_{1/2}-t_0)} = \frac{x_0}{2}$$

După logaritmare și simplificări obținem timpul de înjumătățire :

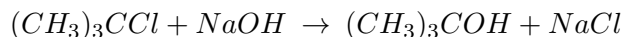
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{r} + t_0.$$

Dacă $t_0 = 0$, atunci obținem timpul de înjumătățire :

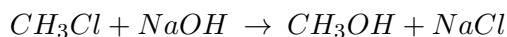
$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{r}.$$

Observație. În jurul anului 1950 o echipă de oameni de știință din Chicago condusă de chimistul Willard Libby au descoperit o metodă care utilizează izotopi radioactivi de carbon și care ajută la determinarea vârstei aproximative a unor substanțe fosilizate. Teoria privitoare la datarea cu carbon este bazată de fapt pe faptul că radioizotopul de Carbon 14 este produs în atmosferă prin acțiunea radiațiilor cosmice asupra Azotului 14. Raportul dintre cantitatea de Carbon 14 și cantitatea de Carbon 12 în atmosferă este constant, deci cantitatea izotopului de carbon prezentă în organismele vii este aceeași cu cea din atmosferă. Când un organism moare absorbția de C-14 realizată prin respirație, hrană sau fotosinteză încetează. Comparând cantitatea de carbon din organism cu cea din atmosferă este posibil să găsim o aproximare rezonabilă a vârstei sale. Această metodă folosește timpul de înjumătățire a C-14. W. Libby a calculat că timpul de înjumătățire a C-14 este aproximativ 5600 de ani, dar azi valoarea acceptată este 5730 de ani. Metoda lui Libby a fost folosită pentru a afla de când datează o mobilă din lemn descoperită în mormintele egiptene, o copie recent descoperită a Evangheliei a lui Iuda scrisă pe papyrus și Giulgiul din Torino. Această metodă se bazează pe modelul dezintegrării radioactive.

3.2. Reacții chimice. [[1], [3], [4], [6]] Dezintegrarea unei substanțe radioactive guvernată de ecuația diferențială $\frac{dx}{dt} = -kx$ se numește reacție de ordinul întâi. În chimie, o parte din reacțiile chimice urmează aceeași lege: dacă moleculele substanței A se descompun în molecule mai mici, atunci rata de descompunere este direct proporțională cu cantitatea de substanță care nu a suferit schimbări. Un exemplu de reacție chimică de ordinul I este transformarea soluției de clorură de terț-butil($(CH_3)_3CCl$) în alcool terț butilic($(CH_3)_3COH$).



În reacția de mai sus doar concentrația de $(CH_3)_3CCl$ controlează rata de reacție. Dar în reacția



o moleculă de hidroxid de sodiu($NaOH$) este consumată pentru fiecare moleculă de clorură de metil(CH_3Cl) formându-se astfel o moleculă de alcool

metilic(CH_3OH) și o moleculă de clorură de sodiu($NaCl$). În acest caz, rata la care reacția are loc este proporțională cu produsul concentrațiilor rămase de CH_3Cl și $NaOH$. Pentru a vizualiza o generalizare a situației de mai sus, să considerăm că o moleculă dintr-o substanță A se combină cu o moleculă dintr-o substanță B pentru a forma o moleculă dintr-o substanță C . Dacă X reprezintă cantitatea de soluție chimică C formată la timpul t și α , respectiv β reprezintă cantitățile celor două substanțe A , respectiv B la timpul $t = 0$ (cantitățile inițiale), atunci cantitățile de substanță A și B care nu sunt transformate în substanța C la un moment dat sunt egale cu $\alpha - X$ și $\beta - X$. Deci rata de formare a substanței C este dată de relația

$$(4) \quad \frac{dX}{dt} = k \cdot (\alpha - X) \cdot (\beta - X)$$

unde k este constanta de proporționalitate. Modelul de mai sus este numit reacție de ordinul doi.

Ecuatiei diferențiale (4) i se poate atașa condiția inițială:

$$(5) \quad X(0) = 0.$$

Ecuatia diferențială (4) și condiția inițială (5) formează împreună problema Cauchy:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dX}{dt} = k \cdot (\alpha - X) \cdot (\beta - X) \\ X(0) = 0 \end{cases}$$

Soluția ecuației (4) se obține astfel:

$$\frac{dX}{dt} = k \cdot (\alpha - X) \cdot (\beta - X) \Leftrightarrow \frac{dX}{\beta - \alpha} \cdot \left(\frac{1}{\alpha - X} - \frac{1}{\beta - X} \right) = k \cdot dt$$

După integrare și efectuarea unor calcule elementare se obține soluția generală a ecuației:

$$X(t) = \frac{C \cdot \alpha \cdot e^{k \cdot (\beta - \alpha) \cdot t} - \beta}{C \cdot e^{k \cdot (\beta - \alpha) \cdot t} - 1}.$$

Din condiția (5) se obține:

$$(7) \quad C = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Soluția problemei Cauchy (6) este:

$$X(t) = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot (e^{k \cdot (\beta - \alpha) \cdot t} - 1)}{\beta \cdot e^{k \cdot (\beta - \alpha) \cdot t} - \alpha}.$$

În continuare vom determina punctele de echilibru ale acestui model rezolvând ecuația:

$$\frac{dX}{dt} = 0 \Leftrightarrow k \cdot (\alpha - X) \cdot (\beta - X) = 0$$

Cum constanta $k \neq 0$ rezultă că cele două puncte de echilibru sunt $X_1 = \alpha$ și $X_2 = \beta$.

Pentru valorile particulare $k = 0.5$, $\alpha = 2$, $\beta = 1$ se obține graficul ecuației diferențiale care descrie comportamentul a două substanțe care reacționează:

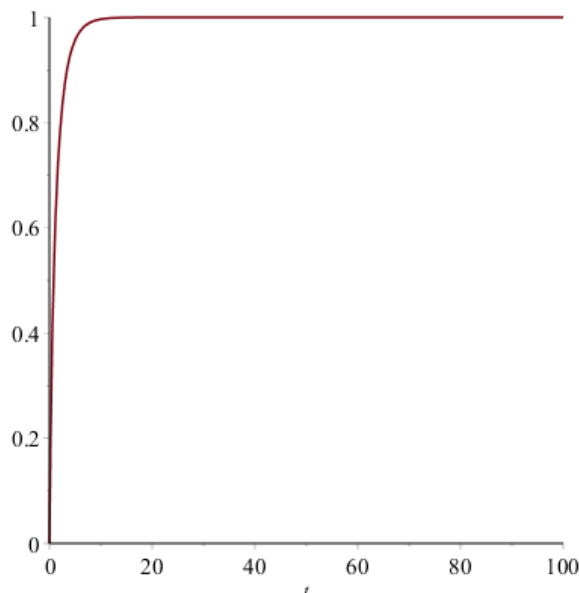


Figura. 3.2 – Graficul reacției chimice a două substanțe

Analizând graficul se observă faptul că cantitatea de soluție chimică C rezultată în urma reacției dintre substanțele A și B crește atât timp cât în reacție intervin ambele soluții A și B . Când cea care este mai puțină se termină atunci cantitatea de soluție C devine constantă. Cu alte cuvinte, dacă α este cantitatea inițială de substanță A și β este cantitatea inițială de substanță B , atunci la finalul reacției cantitatea de substanță C va fi $\min\{\alpha, \beta\}$.

3.3. Diluarea unei soluții. [[1], [3], [4], [6]] Se consideră un rezervor care conține un volum V_0 de saramură (apă amestecată cu sare). Volumul se măsoară în litri, iar soluția conține a g de sare.

O altă soluție care conține b g de sare per litru este turnată în rezervor cu o rată de e l/min și, în același timp, soluția amestecată iese din rezervor cu o rată egală cu f l/min. Problema constă în a găsi cantitatea de sare din rezervor la momentul t . Fie $Q(t)$ cantitatea de sare din rezervor la momentul t . Rata cu care cantitatea de sare din rezervor se schimbă este dQ/dt , egală cu rata cu care sarea intră în rezervor minus rata cu care sarea părăsește rezervorul. Sarea intră în rezervor cu o rată de $b \cdot e$ g/min. Pentru a determina rata cu care sarea părăsește rezervorul trebuie să calculăm prima dată volumul de saramură care se găsește în rezervor la momentul t . Acesta este volumul inițial

V_0 plus volumul de saramură adăugat, $e \cdot t$, minus volumul de saramură care iese din rezervor, $f \cdot t$. Deci, volumul de saramură din rezervor la momentul t este:

$$V_0 + e \cdot t - f \cdot t$$

Concentrația de sare din rezervor la momentul t este egală cu:

$$\frac{Q}{V_0 + e \cdot t - f \cdot t}$$

Deci, sarea părăsește rezervorul cu o rată de:

$$f \cdot \left(\frac{Q}{V_0 + e \cdot t - f \cdot t} \right)$$

În concluzie, modelul matematic care descrie variația cantității de sare din rezervor este guvernat de ecuația diferențială:

$$\frac{dQ}{dt} = b \cdot e - f \cdot \left(\frac{Q}{V_0 + e \cdot t - f \cdot t} \right)$$

Pentru a fi mai clară construcția modelului s-a considerat cazul în care este amestecată apă cu sare, dar modelul este valabil și pentru alte amestecuri de substanțe, cum ar fi apă cu zahăr sau apă cu substanțe chimice toxice.

Pentru a determina soluția modelului vom considera două cazuri distincte:

Cazul I. În acest caz vom determina soluția modelului atunci când $f \neq e$. Ecuația diferențială este de tip liniar și o vom rezolva prin metoda variației constantei. În primul rând vom rezolva ecuația omogenă cu variabile separabile

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{f}{V_0 + (e-f) \cdot t} \cdot Q$$

Soluția acestei ecuații este:

$$Q_0 = C \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t)^{\frac{f}{f-e}}$$

În continuare considerăm pe C ca funcție de timp și avem:

$$Q_p = C(t) \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t)^{\frac{f}{f-e}}$$

Derivăm Q_p în raport cu timpul și înlocuim Q_p și Q'_p în ecuația inițială. După simplificări se obține:

$$C'(t) = b \cdot e \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t)^{\frac{f}{e-f}}$$

Integrând avem:

$$C(t) = b \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t)^{\frac{e}{e-f}}$$

Deci, $Q_p = b \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t)$.

Soluția generală a modelului este:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = C \cdot (v_0 + (e - f) \cdot t)^{\frac{f}{f-e}} + b \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t), C \in \mathbb{R}.$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = a$, obținem:

$$Q(t) = (a - b \cdot V_0) \cdot V_0^{\frac{f}{e-f}} \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t)^{\frac{f}{f-e}} + b \cdot (V_0 + (e - f) \cdot t).$$

În graficul următor se prezintă situația în care rata cu care soluția amestecată părăsește rezervorul este mai mare decât rata cu care intră soluție în rezervor, adică $f > e$. Cele trei curbe corespund situațiilor în care concentrația de sare care intră în rezervor este mai mare, egală, respectiv mai mică decât

cea existentă deja în rezervor. Considerăm $c_0 = \frac{a}{V_0}$ concentrația de sare din rezervor la momentul inițial.

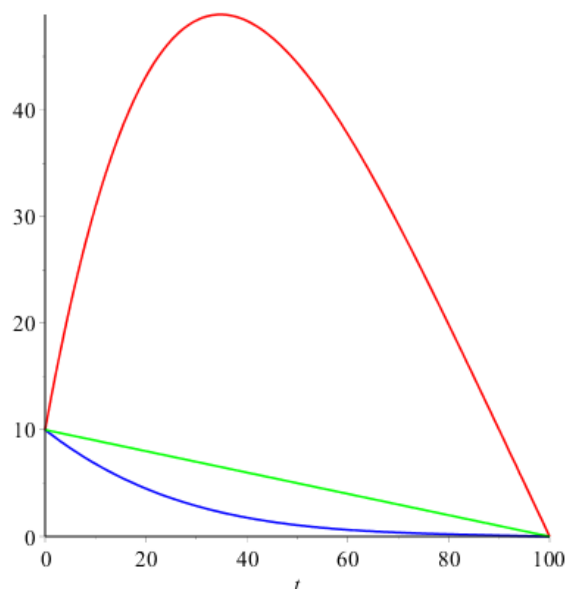


Figura. 3.3 – Variația cantității de sare când $f > e$

- $b > c_0$: roșu
- $b = c_0$: verde
- $b < c_0$: albastru

Se observă că atunci când concentrația saramurii care intră în bazin este mai mare decât cea deja existentă în bazin, cantitatea de sare crește, iar apoi scade și în timp tinde la zero, deoarece la un moment dat în rezervor nu va mai exista lichid de amestecat datorită faptului că debitul cu care amestecul iese din rezervor este mai mare decât debitul cu care intră o nouă soluție. În cazul în care cele două concentrații sunt egale cantitatea de sare din bazin scade odată cu scăderea cantității de saramură din rezervor. Atunci când concentrația din saramura care intră în rezervor este mai mică decât concentrația saramurii deja existentă, cantitatea de sare scade, tinzând în timp la zero. Deci, oricât ar fi concentrația de sare din soluția care este adăugată în rezervor, în timp cantitatea de sare tinde la zero datorită faptului că debitul cu care soluția iese din bazin este mai mare decât debitul cu care intră saramură în rezervor.

Situația în care rata cu care soluția intră în rezervor este mai mare decât rata cu care soluția iese din rezervor, adică $f < e$, este prezentată în graficul de mai jos. Cele trei curbe corespund situațiilor în care concentrația de sare care intră în rezervor este mai mare, egală, respectiv mai mică decât cea existentă

deja în rezervor. Considerăm $c_0 = \frac{a}{V_0}$ concentrația de sare din rezervor la momentul inițial.

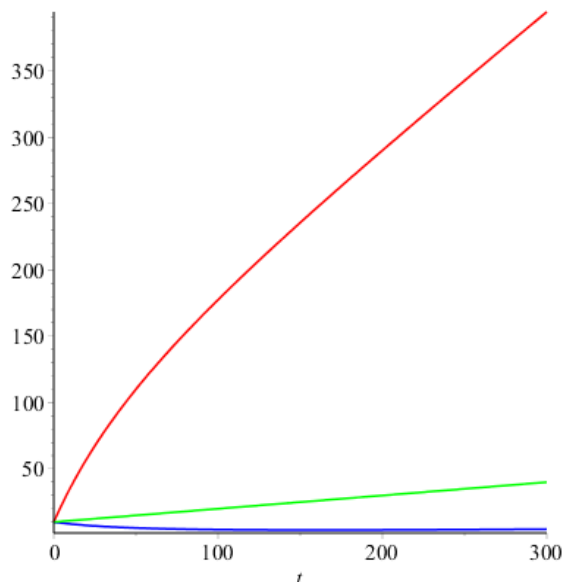


Figura. 3.4 – Variația cantității de sare când $f < e$

- $b > c_0$: roșu
- $b = c_0$: verde
- $b < c_0$: albastru

Analizând graficul de mai sus observăm că atunci când concentrația de sare din soluția adăugată în rezervor este mai mare, respectiv egală cu cea existentă deja, cantitatea de sare crește în timp tinzând la infinit. În cazul în care concentrația de sare adăugată este mai mică decât cea existentă, cantitatea de sare scade până când se stabilizează, apoi începe să crească, în timp tinzând la infinit. Creșterea nelimitată a cantității de sare se datorează faptului că debitul cu care intră soluție în bazin este mai mare decât debitul cu care iese.

Cazul II. În acest caz vom considera că rata cu care saramura intră în rezervor este egală cu rata cu care amestecul din rezervor iese, adică $f = e$. Notând $e = f =: r$ modelul devine:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r}{V_0} \cdot Q = b \cdot r$$

Ecuția liniară se rezolvă asemănător cu cea de la primul caz. Primul pas constă în rezolvarea ecuației omogene cu variabile separabile:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{r}{V_0} \cdot Q = 0$$

Soluția acestei ecuații este:

$$Q_0 = C \cdot e^{-\frac{r}{V_0} \cdot t}$$

Considerând pe C ca funcție de timp, avem:

$$Q_p = C(t) \cdot e^{-\frac{r}{V_0} \cdot t}$$

Derivând Q_p în raport cu t și înlocuind Q_p și Q'_p în ecuația inițială și făcând simplificările convenabile obținem:

$$C'(t) = b \cdot r \cdot e^{\frac{r}{V_0} \cdot t}$$

Integrând avem că $C(t) = b \cdot V_0 \cdot e^{\frac{r}{V_0} \cdot t}$.

Deci, $Q_p = b \cdot V_0$ și soluția generală a modelului este:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = C \cdot e^{-\frac{r}{V_0} \cdot t} + b \cdot V_0$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = a$, obținem:

$$Q(t) = (a - b \cdot V_0) \cdot e^{-\frac{r}{V_0} \cdot t} + b \cdot V_0$$

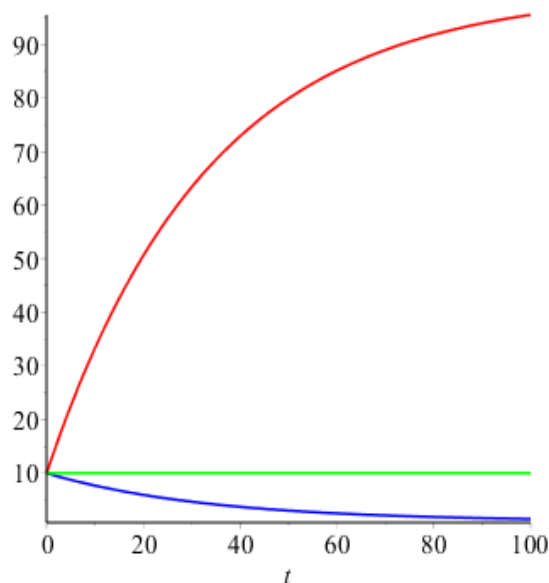
Valoarea de echilibru se determină rezolvând ecuația:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \Leftrightarrow b \cdot r - \frac{r}{V_0} \cdot Q = 0$$

Rezolvând ecuația în raport cu Q obținem punctul de echilibru:

$$Q = b \cdot V_0$$

Situația în care rata cu care soluția intră în rezervor este egală cu rata cu care soluția iese din rezervor, adică $f = e$, este prezentată în graficul de mai jos. Cele trei curbe corespund situațiilor în care concentrația de sare care intră în rezervor este mai mare, egală, respectiv mai mică decât cea existentă deja în rezervor. Considerăm $c_0 = \frac{a}{V_0}$ concentrația de sare din rezervor la momentul inițial.

Figura. 3.5 – Variația cantității de sare când $f = e$

- $b > c_0$: roșu
- $b = c_0$: verde
- $b < c_0$: albastru

Analizând graficul de mai sus se observă faptul că atunci când concentrația de sare din soluția care intră în rezervor este mai mare decât concentrația care există deja, cantitatea de sare crește până când atinge valoarea de echilibru, apoi rămâne constantă. În cazul în care cele două concentrații sunt egale cantitatea de sare rămâne constantă în timp fiind egală cu cea inițială. În cazul în care concentrația sării din saramura adăugată este mai mică decât concentrația sării din saramura existentă în rezervor, cantitatea de sare din amestec scade odată cu trecerea timpului, până când atinge punctul de echilibru, apoi rămâne constantă. Aspiratia, în timp, a cantității de sare la o valoare constantă se datorează faptului că cele două debite sunt egale.

3.4. Exemple.

EXEMPLUL 1. *Timpul de înjumătățire al unui izotop radioactiv este acel timp în care o anumită cantitate de substanță se înjumătățește prin dezintegrare.*

- (1) *Timpul de înjumătățire pentru Carbon14(C14) este 5230 ani. Determinați rata de dezintegrare λ pentru C14.*
- (2) *Timpul de înjumătățire pentru Iod131(I131) este de 8 zile. Determinați parametrul de dezintegrare λ al I131.*
- (3) *Care sunt unitățile de măsură pentru λ de la punctele a) și b) ?*

- (4) *Ca să determinăm timpul de înjumătățire pentru un izotop, trebuie să pornim cu 1 000 de atomi din acel izotop și să măsurăm timpul în care ei scad la 500 prin dezintegrare sau să luăm inițial 10 000 de atomi și să măsurăm timpul în care ei scad la 5 000. O să găsim același răspuns? De ce?*

(Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Paul Blanchard, Robert L.Devaney, Glen R.Hall, *Differential Equation*, pagina 17, problema 11], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție.Fie modelul matematic:

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = -\lambda r \\ r(0) = r_0 \end{cases}$$

Soluția acestui model este:

$$r(t) = r_0 e^{-\lambda t}$$

- (a) Știm că $r(5230) = \frac{r_0}{2} \Rightarrow r_0 e^{-\lambda 5230} = \frac{r_0}{2}$.

După simplificări și logaritmare se obține:

$$5230\lambda = \ln 2$$

De unde rezultă:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{5230} \approx 0.00013253$$

- (b) Știm că $r(8) = \frac{r_0}{2} \Rightarrow r_0 e^{-\lambda 8} = \frac{r_0}{2}$.

După simplificări și logaritmare obținem:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{8} \approx 0.08664$$

- (c) La a) unitatea de măsură pentru λ este: *ani*⁻¹

La b) unitatea de măsură pentru λ este: *zile*⁻¹

(d) Da, o să găsim același răspuns, deoarece timpul de înjumătățire nu depinde de cantitatea inițială, ci doar de parametrul de dezintegrare. Deci, pentru aceeași substanță timpul de înjumătățire este același indiferent de cantitate, și este egal cu $\frac{\ln 2}{r}$, unde $r =$ constanta de dezintegrare.

EXEMPLUL 2. *Datarea cu carbon este o metodă cu ajutorul căreia se determină timpul scurs de la decesul unui organism. Cantitatea izotopului de carbon prezentă în organismele vii este aceeași ca și în atmosferă. Când un organism moare, cantitatea de carbon începe să scadă fără a fi înlocuită.*

Folosind rata de dezintegrare a carbonului găsită la exercițiul anterior, determinați cât timp a trecut de la decesul unui organism, dacă:

a) 2% din cantitatea inițială de carbon se găsește acum în organism;

b) 98% din cantitatea inițială de carbon se găsește acum în organism. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Paul Blanchard, Robert L.Devaney, Glen R.Hall, *Differential Equation*, pagina 17, problema 12], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție. Fie:

$$\frac{dx}{dt} = -rx \text{ modelul dezintegrării radioactive}$$

$$r = \frac{\ln 2}{5230} \text{ rata de dezintegrare}$$

x_0 cantitatea inițială

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{\ln 2}{5230} t} \text{ soluția modelului cu condiție inițială}$$

a) Știm $x(t) = 2\%x_0$. De aici rezultă că:

$$x_0 e^{-\frac{\ln 2}{5230} t} = 0.02x_0 \Rightarrow t \approx 29 \ 517 \text{ ani}$$

Deci după aproximativ 29 517 ani de la deces, 2% din cantitatea inițială de carbon se mai găsește în organism.

b) Știm $x(t) = 98\%x_0$. De aici rezultă că:

$$x_0 e^{-\frac{\ln 2}{5230} t} = 0.98x_0 \Rightarrow t \approx 152 \text{ ani}$$

Deci după aproximativ 152 ani de la deces 98% din cantitatea inițială de carbon se mai găsește în organism.

EXEMPLUL 3. Fosilele sunt deseori datate utilizând ecuația diferențială

$$\frac{dA}{dt} = -\alpha A$$

unde A este cantitatea de substanță radioactivă rămasă, α este constantă și t se măsoară în ani. Presupunând că $\alpha = 1.5 \cdot 10^{-7}$ să se determine vârsta unei fosile care conține substanța radioactivă A dacă a mai rămas doar 30% din substanță. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Stephen Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Maple*, pagina 39, problema 2], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție. Această problemă va fi rezolvată folosind soft-ul matematic Maple. Cantitatea inițială de substanță va fi considerată A_0 .

```
>restart:with(DEtools):
> ec:=diff(A(t),t)=-alpha·A(t)
      ec:= $\frac{d}{dt}A(t) = -\alpha A(t)$ 
> alpha := 1.5·10-7
      alpha := 1.500000000·10-7
> sol:=dsolve({ec,A(0)=A0},A(t))
      sol:= $A(t) = A_0 e^{-\frac{3}{20000000}t}$ 
> A:=unapply(rhs(sol),t)
      A:= $t \rightarrow A_0 e^{-\frac{3}{20000000}t}$ 
> solve(A(t)= $\frac{30}{100} \cdot A_0$ ,t)
       $-\frac{20000000}{3} \ln(\frac{3}{10})$ 
> evalf(%)
      8.026485360·106
```

Deci, vârsta fosilei este de $8.026485360 \cdot 10^6$ ani.

EXEMPLUL 4. Două substanțe chimice A și B sunt combinate pentru a forma o substanță chimică C . Viteza de reacție la momentul t este proporțională cu produsul dintre cantitățile de substanțe A și B care la momentul t nu au

fost supuse reacției (cantitățile rămase). Inițial, sunt 40 de grame de substanță A și 50 de grame de substanță B , și pentru fiecare gram de substanță B se folosesc 2 grame de substanță A . Se observă că 10 grame de substanță C se formează în 5 minute. Ce cantitate de substanță C se formează după 20 de minute? Care este cantitatea limitată de substanță C după mult timp? Ce cantități de substanțe A și B rămân după mult timp? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, *A first Course in Differential Equations with Modeling Applications*, pagina 101, problema 9], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție. Fie $X(t)$ cantitatea de substanță C rezultată în urma reacției la momentul t . Avem că:

$$\begin{aligned} X(0) &= 0 \\ X(5) &= 10 \end{aligned}$$

Dacă a grame din substanța A reacționează cu b grame din substanța B presupunem că se formează 2 grame de substanță C . Avem că:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ a = 2b \end{cases}$$

Rezolvând sistemul găsim că $a = 2(\frac{2}{3})$ și $b = 2(\frac{1}{3})$. Deci, la momentul t rămân $40 - \frac{2}{3}X$ g de substanță A și $50 - \frac{1}{3}X$ g de substanță B . Știm că:

$$\frac{dX}{dt} \propto (40 - \frac{2}{3}X)(50 - \frac{1}{3}X)$$

Ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{dX}{dt} = k(60 - X)(150 - X)$$

Primul pas în rezolvarea ecuației este separarea variabilelor:

$$\frac{dX}{(60-X)(150-X)} = kdt$$

Descompunând produsul din stânga egalului în diferență de două fracții și apoi integrând obținem:

$$\ln \frac{150-X}{60-X} = 90kt + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

Aplicând funcția exponențială avem:

$$\frac{150-X}{60-X} = C_1 e^{90kt}$$

Atașând condiția inițială $X(0) = 0$ expresiei de mai sus obținem constanta $C_1 = \frac{5}{2}$ și pe urmă atașând condiția $X(5) = 10$ se determină că $90k = 0.0226$. Înlocuind cele determinate în expresia de mai sus și rezolvând ecuația în variabila X se găsește soluția modelului:

$$X(t) = 300 \frac{e^{0.0226t} - 1}{5e^{0.0226t} - 2}$$

După 20 de minute vor fi $X(20) = 29.26$ grame de substanță C .

Cantitatea de substanță C după mai mult timp se determină calculând limita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 60$$

Deci, când $t \rightarrow \infty$ cantitatea de substanță C va fi de 60 de grame.

Cantitățile de substanțe A și B care rămân după o perioadă lungă de timp se determină astfel:

$$40 - \frac{2}{3}60 = 0 \text{ g de substanță } A$$

$$50 - \frac{1}{3}60 = 30 \text{ g de substanță } B$$

EXEMPLUL 5. *Să se rezolve problema anterioară dacă inițial sunt 100 de grame de substanță chimică A . După cât timp substanța chimică C este jumătate formată? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, *A first Course in Differential Equations with Modeling Applications*, pagina 101, problema 10], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)*

Soluție. Conform datelor de la problema anterioară avem că:

$$\frac{dX}{dt} \propto (100 - \frac{2}{3}X)(50 - \frac{1}{3}X)$$

Ceea ce este echivalent cu:

$$\frac{dX}{dt} = k(150 - X)(150 - X) = k(150 - X)^2$$

Primul pas în rezolvarea ecuației este separarea variabilelor:

$$\frac{dX}{(150-X)^2} = kdt$$

Integrând obținem:

$$\frac{1}{150-X} = kt + C_1, C_1 \in \mathbb{R}$$

De unde rezultă:

$$X(t) = \frac{150kt + 150C_1 - 1}{kt + C_1}$$

Atașând condiția inițială $X(0) = 0$ expresiei de mai sus obținem constanta $C_1 = \frac{1}{150}$ și soluția modelului:

$$X(t) = \frac{22500kt}{150kt + 1}$$

Pentru a determina constanta de proporționalitate vom rezolva ecuația $X(5) = 10$, de unde se obține $k = 1/10500$. Deci cantitatea de soluție chimică la momentul t este dată de legea:

$$X(t) = \frac{150t}{t+70}$$

Cantitatea de substanță C formată la finalul reacției se determină calculând limita:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 150$$

Pentru a determina după cât timp va fi formată jumătate din cantitatea de substanță trebuie să rezolvăm ecuația $X(t) = 150/2$, unde necunoscuta este timpul. Soluția ecuației este $t = 70$. Deci, după 70 de minute va fi formată jumătate din cantitatea de substanță C .

EXEMPLUL 6. Când anumite tipuri de substanțe chimice se amestecă, rata cu care noul compus este format este modelată de ecuația diferențială autonomă:

$$\frac{dX}{dt} = k(\alpha - X)(\beta - X)$$

unde $k > 0$ este constanta de proporționalitate și $\beta > \alpha > 0$. Aici $X(t)$ reprezintă numărul de grame de substanță nou formată la momentul t .

(a) Utilizați un portret fazic pentru a determina comportamentul funcției $X(t)$ când $t \rightarrow \infty$.

(b) Se consideră cazul când $\alpha = \beta$. Să se utilizeze un portret fazic care descrie comportamentul funcției $X(t)$ când $t \rightarrow \infty$ și $X(0) < \alpha$ și când $X(0) > \alpha$.

(c) Verificați dacă soluția ecuației diferențiale în cazul în care $k = 1$ și $\alpha = \beta$ este $X(t) = \alpha - 1/(t + c)$. Găsiți o soluție care îndeplinește condiția $X(0) = \alpha/2$. Apoi găsiți o soluție care îndeplinește condiția $X(0) = 2\alpha$. Realizați graficul celor două soluții. Comportamentul acestor funcții când $t \rightarrow \infty$ este similar cu cel al funcțiilor de la punctul b? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, *A first Course in Differential Equations with Modeling Applications*, pagina 46, problema 42], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție. (a) Soluția acestei probleme va fi dată cu ajutorul soft-ului matematic Maple:

```
>restart:with(DEtools):with(plots):
>ec:=diff(X(t),t)=k*(alpha-X(t))*(beta-X(t))
ec:= $\frac{d}{dt}X(t) = k(\alpha - X(t))(\beta - X(t))$ 
```

Pentru a determina portretul fazic trebuie să dam valori particulare constantelor k , α și β .

```
> k :=  $\frac{1}{500}$  : alpha := 20 : beta := 60 :
```

Soluția modelului pentru valorile particulare amintite mai sus este:

```
>sol:=dsolve({ec,X(0)=0},X(t))
sol:= $X(t) = \frac{60(e^{\frac{4}{5}t}-1)}{3e^{\frac{4}{5}t}-1}$ 
> f := X → k*(alpha-X)*(beta-X)
f :=  $X \rightarrow k(\alpha - X)(\beta - X)$ 
>ec:=diff(X(t),t)=f(X(t))
ec:= $\frac{d}{dt}X(t) = \frac{1}{500}(20 - X(t))(60 - X(t))$ 
```

Punctele de echilibru ale modelului sunt:

```
>pct_ech:=solve(f(X)=0,X)
pct_ech:=20,60
```

```
>DEplot(ec,X(t),t=-5..5,[[X(0)=10],[X(0)=15],[X(0)=20],[X(0)=25],
[X(0)=40],[X(0)=60],[X(0)=65],[X(0)=70]])
```

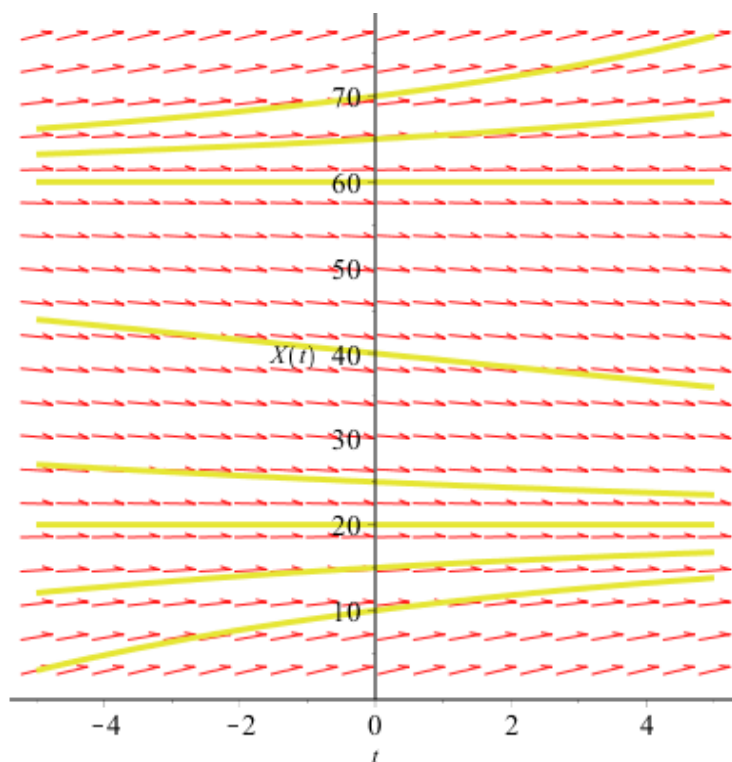



Figura. 3.6 – Portret fazic(1)

Analizând portretul fazic de mai sus se observă faptul că atunci când condițiile inițiale sunt mai mici decât punctul inferior de echilibru(20) sau mai mari decât acesta, dar mai mici decât 60(al doilea punct de echilibru), $X(t)$ tinde la punctul de echilibru inferior. Dacă condițiile inițiale sunt mai mari decât 60, atunci $X(t)$ va tinde la infinit.

(b) Pentru a determina soluția la punctul (b) se consideră $\alpha = \beta$.

```

>alpha:=20:beta:=20:
>sol:=dsolve({ec,X(0)=0},X(t))
sol:=X(t) =  $\frac{60(e^{\frac{2}{25}t}-1)}{3e^{\frac{2}{25}t}-1}$ 
>f:=X → k · (alpha - X) · (beta - X)
f:=X → k(α - X)(β - X)
>ec:=diff(X(t),t)=f(X(t))
ec:= $\frac{d}{dt}X(t) = \frac{1}{500}(20 - X(t))^2$ 
>pct_ech:=solve(f(X)=0,X)
pct_ech:=20,20

```

Observăm că punctul de echilibru este chiar α .

```

>DEplot(ec,X(t),t=-10..10,[[X(0)=10],[X(0)=15],[X(0)=20],[X(0)=25],
,[X(0)=40]])

```

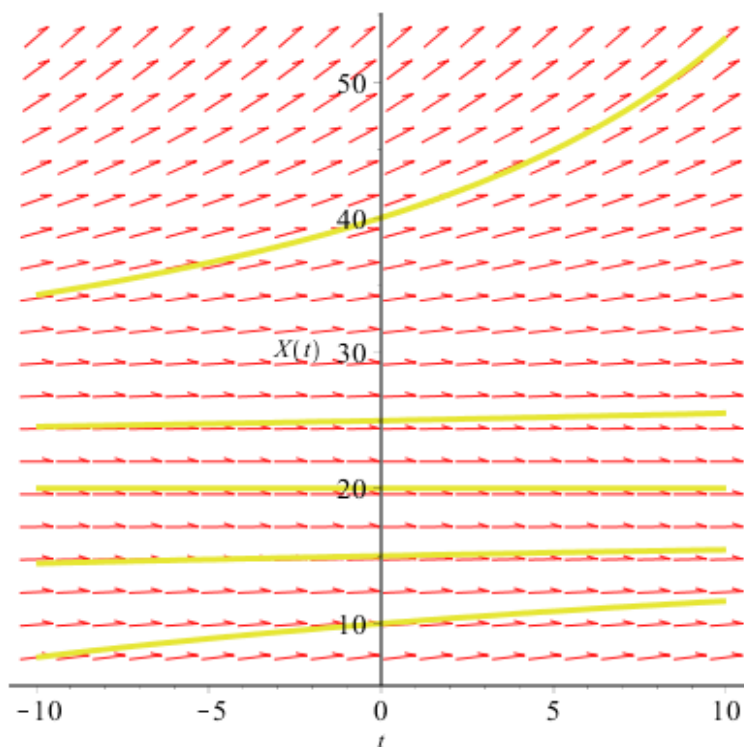


Figura. 3.7 – Portret fazic(2)

Analizând portretul fazic se observă că dacă $X(0) < \alpha$, atunci $X(t)$ tinde la α când $t \rightarrow \infty$, iar când $X(0) > \alpha$, atunci $X(t) \rightarrow \infty$.

(c) Soluția de la punctul (c) se regăsește în liniile următoare:

```
>restart:with(DEtools):with(plots):
```

```
>ec:=diff(X(t),t)=(alpha - X(t))^2
```

```
ec:=d/dt X(t) = (alpha - X(t))^2
```

```
>sol:=dsolve(ec,X(t))
```

```
sol:=X(t) = -C1*alpha+alpha*t-1 / -C1+t
```

Soluția generală a ecuației determinată mai sus este echivalentă cu forma dată în enunț.

Pentru a putea reprezenta grafic trebuie să-i dăm constantei α o valoare numerică.

```
>alpha:=20
```

```
alpha := 20
```

```
> f:=X -> (alpha - X)^2
```

```
f:=X -> (alpha - X)^2
```

```
>pct.ech:=solve(f(X)=0,X)
```

```
pct.ech:=20,20
```

```
>sol1:=dsolve({ec,X(0) = alpha/2},X(t))
```

```

sol1:=X(t) =  $\frac{10(20t+1)}{10t+1}$ 
>y1:=unapply(rhs(sol1),t)
y1:=t →  $\frac{10(20t+1)}{10t+1}$ 
>p1:=plot(20,t = -50..50,color=blue, linestyle=longdash):
>p2:=plot(y1(t),t = -50..50):
>display(p1,p2)

```

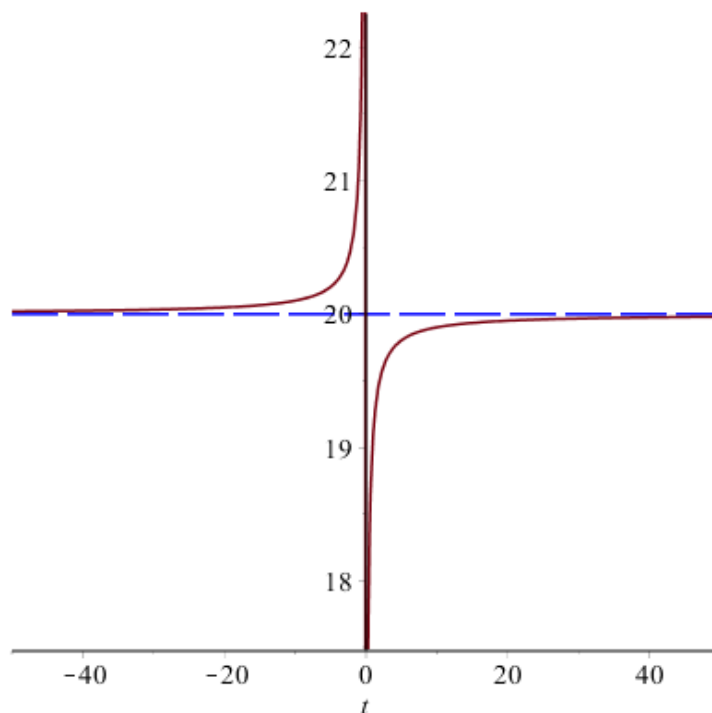


Figura. 3.8 – Grafic(1)

Analizând graficul de mai sus se observă faptul că dacă condițiile inițiale sunt mai mari decât soluția de echilibru, atunci $X(t)$ tinde la infinit când $t \rightarrow \infty$. În caz contrar, dacă condițiile inițiale sunt mai mici decât soluția de echilibru, atunci cantitatea de substanță nou formată tinde în timp la punctul de echilibru.

```

>sol2:=dsolve({ec,X(0) = 2 · alpha},X(t))
sol2:=X(t) =  $\frac{40(10t-1)}{20t-1}$ 
>y2:=unapply(rhs(sol2),t)
y2:=t →  $\frac{40(10t-1)}{20t-1}$ 
>p3:=plot(y2(t),t = -50..50):
>display(p1,p3)

```

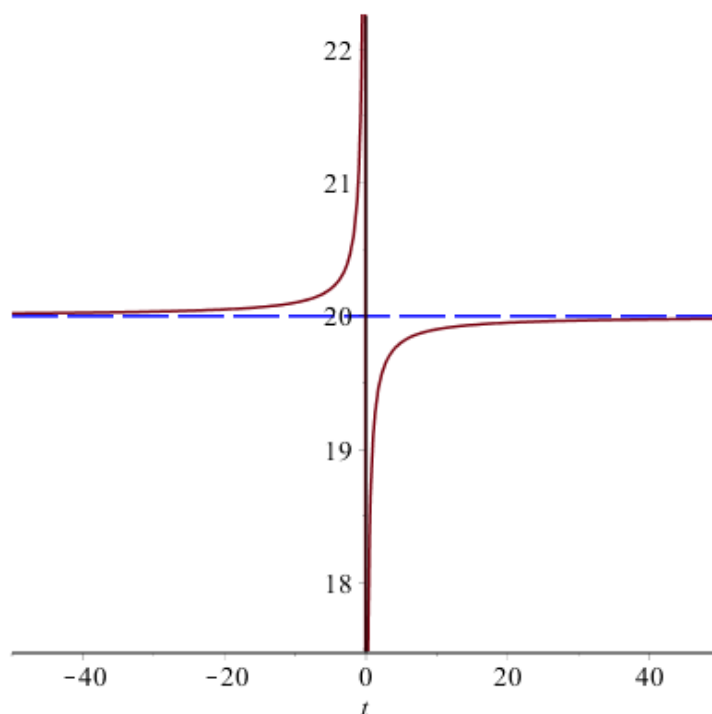


Figura. 3.9 – Grafic(2)

Analizând graficul de mai sus se observă că funcția modelată are același comportament ca aceea studiată anterior.

Comportamentul funcțiilor este similar cu cel al funcțiilor de la punctul (b).

EXEMPLUL 7. *Un bazin mare este parțial umplut cu 100 de galoane de fluid în care s-au dizolvat 10 livre de sare. Saramura care conține o jumătate de livră de sare per galon este pompată în bazin cu o rată de 6 gal/min. Soluția bine amestecată este pompată afară cu o rată de 4 gal/min. Să se găsească numărul de livre de sare din bazin după 30 de minute. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 27], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)*

Soluție. Se știe că:

$$\begin{aligned} V_0 &= 100 \\ b &= \frac{1}{2} \\ e &= 6 \\ f &= 4 \\ Q(0) &= 10 \end{aligned}$$

Se cere $Q(30) = ?$.

Avem ecuația diferențială:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{2}{50+t}Q = 3$$

Prima dată rezolvăm ecuația omogenă cu variabile separabile

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{2}{50+t}Q$$

a cărei soluție este:

$$Q_0 = C(50+t)^{-2}$$

În continuare, privim pe C ca funcție de t și avem:

$$Q_p = C(t)(50+t)^{-2}$$

Derivând Q_p în raport cu timpul și înlocuind Q_p și Q'_p în ecuația inițială se obține:

$$C'(t) = 3(50+t)^2$$

Integrând obținem $C(t) = (50+t)^3$ și imediat rezultă $Q_p = 50+t$.

Soluția generală a ecuației este:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = C(50+t)^{-2} + 50+t, C \in \mathbb{R}$$

Atașând condiția inițială obținem:

$$Q(t) = -10^5(50+t)^{-2} + 50+t$$

Pentru a găsi numărul de livre de sare din bazin după 30 de minute, vom calcula $Q(30) = 64.375$ livre de sare după 30'.

EXEMPLUL 8. *Un lac industrial este plin cu 100 m^3 de apă curată. Apă contaminată cu o substanță chimică toxică de concentrație 0.0002 kg/m^3 este pompată în lac cu o rată de $0.5 \text{ m}^3/\text{min}$. Conținutul este amestecat bine și pe urmă este pompat afară din lac cu aceeași rată. Să se scrie problema cu valori inițiale pentru concentrația contaminată $C(t)$ care se găsește în lac la orice moment t . Determinați concentrația de echilibru. Găsiți o formulă pentru concentrația $c(t)$. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [J. David Logan, A first course in Differential Equations, pagina 49, problema 2], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)*

Soluție. Din datele problemei avem următoarele:

$$\begin{aligned} V_0 &= 100 \\ b &= 0.0002 \\ e &= 0.5 \\ f &= 0.5 \end{aligned}$$

Modelul matematic care descrie variația cantității de substanță chimică din lac este dat de ecuația diferențială:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{200}C = 0.00001$$

Deoarece inițial în lac se află doar apă curată avem condiția inițială $C(0) = 0$. În concluzie, problema cu valori inițiale pentru concentrația contaminată la momentul t este următoarea:

$$\begin{cases} \frac{dC}{dt} + \frac{1}{200}C = 0.00001 \\ C(0) = 0 \end{cases}$$

Fie $dC/dt = f(C)$, unde $f(C) = 0.00001 - C/200$. Concentrația de echilibru este soluția ecuației $f(C) = 0$, adică $C = 0.002 \text{ kg/m}^3$.

Pentru a găsi soluția problemei cu valori inițiale dată mai sus vom rezolva ecuația liniară în două etape. În primul rând se rezolvă ecuația omogenă cu variabile separabile:

$$\frac{dC}{dt} + \frac{1}{200}C = 0$$

Soluția acestei ecuații este:

$$C_0 = \mathcal{C}e^{-\frac{1}{200}t}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

În continuare îl vom privi pe \mathcal{C} ca funcție de timp și avem: $C_p = \mathcal{C}(t)e^{-\frac{1}{200}t}$. Derivând C_p în raport cu timpul, apoi înlocuind C_p și C_p' în ecuația inițială se obține:

$$\mathcal{C}(t)' = 10^{-5}e^{\frac{1}{200}t}$$

Integrând, se obține $\mathcal{C}(t) = 200 \cdot 10^{-5}e^{\frac{1}{200}t}$ și înlocuind $\mathcal{C}(t)$ în expresia lui C_p , avem că $C_p = 100 \cdot 10^{-5}$.

Soluția generală a modelului este:

$$C(t) = C_0 + C_p = \mathcal{C}e^{-\frac{1}{200}t} + 200 \cdot 10^{-5}, \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

Atașând condiția inițială $C(0) = 0$, se obține:

$$C(t) = 200 \cdot 10^{-5}(1 - e^{-\frac{1}{200}t})$$

EXEMPLUL 9. *Un rezervor mare este umplut cu 500 galoane de apă curată. Saramura conținând 2 livre de sare per galon este pompată în rezervor cu o rată de 5 gal/min. Soluția bine amestecată este pompată afară cu aceeași rată. Să se găsească numărul $A(t)$ de livre de sare din rezervor de la momentul t . (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 23], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)*

Având în vedere datele de la problema anterioară, care este concentrația $c(t)$ a sării din rezervor la momentul t ? Dar la $t = 5 \text{ min}$? Care este concentrația sării din rezervor după mai mult timp, adică atunci când $t \rightarrow \infty$? După cât timp concentrația de sare din rezervor este egală cu jumătate din valoarea la limită? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 24], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Să se rezolve problema diluării folosind datele de la problema 23 (problema 9 în cazul nostru) cu presupunerea că soluția este pompată afară cu o rată de 10 gal/min. După cât timp rezervorul se golește? (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [Dennis G. Zill, A first Course in Differential

Equations with Modeling Applications, pagina 91, problema 25], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție. Deoarece ultimele trei probleme enunțate au legătură între ele se va da o singură soluție construită cu ajutorul soft-ului matematic Maple care va răspunde la toate întrebările propuse în cele trei enunțuri de mai sus.

>restart:with(DEtools):

În primul rând se definește forma generală a modelului diluării:

$$\text{>ec:=diff}(A(t), t) = b \cdot e - \frac{f}{V_0 + e \cdot t - f \cdot t} \cdot A(t)$$

$$\text{ec} := \frac{d}{dt} A(t) = be - \frac{fA(t)}{et - ft + V_0}$$

>V0 := 500 : b := 2 : e := 5 : f := 5 :

Pentru valorile particulare date la problema 9 se determină numărul $A(t)$ de livre de sare din rezervor la momentul t .

>sol:=dsolve({ec, A(0) = 0}, A(t))

$$\text{sol} := A(t) = 1000 - 1000e^{-\frac{1}{100}t}$$

Pentru a răspunde întrebărilor de la problema 10 se determină concentrația la momentul t care este egală cu cantitatea de sare din rezervor de la momentul t împărțită la volumul de saramură din rezervor de la același moment.

>c:=unapply(subs({V0 = 500, e = 5, f = 5, A(t) = 1000 - 1000e^{-1/100 t}}, $\frac{A(t)}{V_0 + e \cdot t - f \cdot t}$), t)

$$\text{c} := t \rightarrow 2 - 2e^{-\frac{1}{100}t}$$

După 5 minute concentrația va fi:

>c(5)

$$2 - 2e^{-\frac{1}{20}}$$

>evalf(%)

$$0.097541151$$

După mai mult timp, adică atunci când $t \rightarrow \infty$ concentrația va fi:

>limit(c(t), t=infinity)

$$2$$

Timpul după care concentrația de sare din rezervor este egală cu jumătate din valoarea la limită, adică cu 1, se determină astfel:

>solve(c(t)=1, t)

$$100 \ln(2)$$

Pentru a determina soluția de la problema 11, se atribuie lui f valoarea 10:

>f:=10:

>sol1:=dsolve({ec, A(0) = 0}, A(t))

$$\text{sol1} := A(t) = -10t + 1000 - \frac{1}{10}(t - 100)^2$$

>A:=t → -10t + 1000 - 1/10(t - 100)²

$$\text{A} := t \rightarrow -10t + 1000 - \frac{1}{10}(t - 100)^2$$

Timpul după care rezervorul se golește se determină în două moduri. Unul dintre aceste moduri este rezolvarea ecuației $A(t) = 0$, adică determinarea timpului după care în rezervor nu mai este deloc sare. Se va observa că ecuația are două soluții: 0 și 100. Evident soluția $t = 0$ nu este bună, așa că timpul după care rezervorul se golește va fi de 100 de minute.

`>solve(A(t) = 0, t)`
0,100

Cea de-a doua metodă constă în determinarea timpului la care în rezervor sunt 0 galoane de sare.

`>solve(V0 + e · t - f · t = 0, t)`
100

EXEMPLUL 10. *Un lac conține inițial 1 000 000 de galoane de apă care nu are în compoziția sa substanțe chimice nedorite. Apă care conține 0.01 g/gal substanțe chimice, este pompată în lac cu o rată de 300 gal/oră și cu aceeași rată apa astfel amestecată iese din lac. Se presupune că substanța chimică este distribuită uniform în lac.*

(a) *Fie $Q(t)$ cantitatea de substanță chimică din lac la momentul t . Să se scrie o problemă cu valori inițiale pentru $Q(t)$.*

(b) *Să se rezolve problema de la punctul (a) pentru $Q(t)$. Ce cantitate de substanță chimică se află în lac după un an?*

(c) *După un an sursa de substanță chimică este înlăturată și în lac curge apă curată, iar amestecul iese din lac cu aceeași rată. Să se scrie problema cu valori inițiale care descrie noua situație.*

(d) *Să se rezolve problema cu valori inițiale de la punctul (c). Ce cantitate de substanță chimică rămâne în lac după încă un an (doi ani de la începutul problemei)?*

(e) *Cât timp durează pentru ca $Q(t)$ să se reducă la 10 g?*

(f) *Să se reprezinte grafic $Q(t)$ pentru 3 ani. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition, pagina 16, problema 14], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)*

Soluție.

(a)

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = 3 - \frac{3Q}{10000} \\ Q(0) = 0 \end{cases}$$

(b) În primul rând se determină soluția ecuației omogene cu variabile separabile atașate:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{3Q}{10000}$$

care este:

$$Q_0(t) = Ce^{-3 \cdot 10^{-4}t}, C \in \mathbb{R}$$

În continuare se consideră $Q_p(t) = C(t)e^{-3 \cdot 10^{-4}t}$. Derivând $Q_p(t)$ în raport cu timpul și apoi înlocuind pe Q_p și Q'_p în ecuația inițială, după simplificări se obține:

$$C'(t) = 3 \cdot e^{3 \cdot 10^{-4}t}$$

Integrând și înlocuind $C(t)$ în expresia lui Q_p , obținem soluția generală a ecuației:

$$Q(t) = Q_0 + Q_p = Ce^{-3 \cdot 10^{-4}t} + 10^4$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = 0$ se obține soluția modelului:

$$Q(t) = 10^4(1 - e^{-3 \cdot 10^{-4}t})$$

După un an care are 365 de zile a câte 24 de ore fiecare, cantitatea de substanță chimică din lac va fi:

$$Q(365 \cdot 24) = 10^4(1 - e^{-3 \cdot 10^{-4} \cdot 365 \cdot 24}) = 9277.77 \text{ g.}$$

(c) Problema cu valori inițiale care descrie noua situație este:

$$\begin{cases} \frac{dQ}{dt} = -3 \cdot 10^{-4}Q \\ Q(0) = 9277.77 \end{cases}$$

(d) Problema de la punctul (c) este una cu variabile separabile, iar soluția generală a acesteia este:

$$Q(t) = Ce^{-3 \cdot 10^{-4}t}, C \in \mathbb{R}$$

Atașând condiția inițială, se obține:

$$Q(t) = 9277.77e^{-3 \cdot 10^{-4}t}$$

După încă un an de 365 de zile a câte 24 de ore, cantitatea de substanță chimică din lac va fi:

$$Q(365 \cdot 24) = 9277.77 \cdot e^{-3 \cdot 10^{-4} \cdot 365 \cdot 24} = 670.07 \text{ g.}$$

(e) Se cere a se determina t astfel încât $Q(t) = 10$, ceea ce echivalent cu:

$$9277.77 \cdot e^{-3 \cdot 10^{-4}t} = 10$$

Rezolvând ecuația de mai sus se obține $t = 22775.97$ ore, ceea ce înseamnă 2.60 ani.

(f)

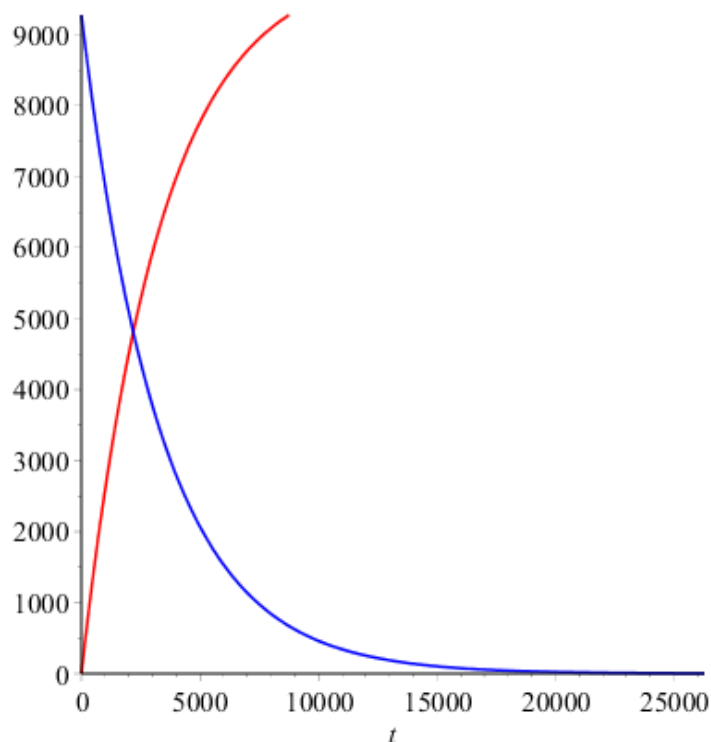


Figura. 3.10 – Variația cantității de substanță chimică din lac

Graficul roșu reprezintă variația cantității de substanță chimică din primul an. Aceasta crește deoarece este pompată în continuu apă contaminată în lac. Graficul albastru reprezintă variația cantității de substanță chimică din lac după ce este sistată furnizarea apei contaminate. Se observă că în timp aceasta scade, deoarece apa din lac este amestecată constant cu alta curată, iar cea contaminată iese din lac.

EXEMPLUL 11. *Se presupune că o cameră conține inițial 1200 ft^3 aer care nu conține monoxid de carbon. La momentul de timp $t = 0$ este introdus în cameră fum de țigară care are o concentrație de 4% de monoxid de carbon cu o rată de $0.1 \text{ ft}^3/\text{min}$ și aerul astfel amestecat părăsește camera cu aceeași rată.*

(a) *Să se găsească expresia concentrației $x(t)$ de monoxid de carbon din cameră la orice moment de timp $t > 0$.*

(b) *Expunerea îndelungată la o concentrație de monoxid de carbon de până la 0.00012 este dăunătoare corpului uman. Găsiți momentul de timp τ la care este atinsă această concentrație. (Enunțul acestei probleme se găsește ca problemă deschisă în [William E. Boyce, Richard C. DiPrima, Elementary*

Differential Equations and Boundary Value Problems, Seventh Edition, pagina 60, problema 19], dar soluția aparține autorului acestei lucrări.)

Soluție. (a) Modelul matematic care descrie variația cantității de monoxid de carbon din cameră este dat de ecuația diferențială:

$$\frac{dQ}{dt} = 0.04 \cdot 0.1 - 0.1 \cdot \frac{Q}{1200}$$

Pentru a determina soluția acesteia, în primul rând se rezolvă ecuația omogenă cu variabile separabile atașată:

$$\frac{dQ}{dt} = -0.1 \cdot \frac{Q}{1200}$$

a cărei soluție este:

$$Q_0(t) = Ce^{-\frac{0.1}{1200}t}, C \in \mathbb{R}.$$

În continuare, se consideră $Q_p(t) = C(t)e^{-\frac{0.1}{1200}t}$. Derivând Q_p în raport cu timpul și apoi înlocuind Q_p și Q'_p în expresia inițială, după simplificări, se obține:

$$C'(t) = 0.04 \cdot 0.1 \cdot e^{\frac{0.1}{1200}t}$$

Integrând și înlocuind $C(t)$ în expresia lui Q_p , se obține apoi soluția generală a modelului:

$$Q(t) = Q_0(t) + Q_p(t) = Ce^{-\frac{0.1}{1200}t} + 48$$

Atașând condiția inițială $Q(0) = 0$ se obține:

$$Q(t) = -48e^{-\frac{0.1}{1200}t} + 48$$

Concentrația de monoxid de carbon din cameră la momentul t se determină împărțind cantitatea de monoxid de carbon la volumul total de aer din cameră:

$$x(t) = \frac{-48(e^{-\frac{0.1}{1200}t} - 1)}{1200} = -0.04(e^{-\frac{0.1}{1200}t} - 1)$$

(b) Se cere a se determina $\tau = ?$ astfel încât $x(\tau) = 0.00012$, ceea ce este echivalent cu:

$$0.04(1 - e^{-\frac{\tau}{12000}}) = 0.00012$$

Rezolvând ecuația de mai sus se obține:

$$\tau = 36.05 \text{ min.}$$

BIBLIOGRAFIE

- [1] Paul Blanchard, Robert L. Devaney, Glen R. Hall, *Differential Equations*, Third Edition
- [2] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, Seventh Edition
- [3] J. David Logan, *A First Course in Differential Equations*
- [4] Stephen Lynch, *Dynamical Systems with Applications using Maple*, Second Edition
- [5] Marcel-Adrian Șerban, *Ecuații și sisteme de ecuații diferențiale*, Presa Universitară Clujeană, 2009
- [6] Dennis G. Zill, *A first Course in Differential Equations with Modeling Applications*, Tenth Edition

Facultatea de Matematică și Informatică
Universitatea Babeș-Bolyai, Cluj-Napoca
e-mail: oaageorgiana44@yahoo.com