**DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 36 (2018), Pages 61-63**

# O GENERALIZARE A UNEI PROBLEME REFERITOARE LA PRIMITIVA UNEI FUNCŢII

Gheorghe Şimon

**Abstract.** This note shows a possible generalization of Problem 26982, G.M.-B, number 10/2014.

**MSC 2000.** Primitive function, inequalities.

**Key words.** 26A42, 26Dxx.

În această notă matematică vom prezenta o generalizare a Problemei 26982 din G.M.-B nr. 10/2014, autor Traian Tămâian, Carei, Satu Mare.

TEOREMA 1. *Fie $F$ primitiva funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = e^{x^n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ cu $F(0) = -\dfrac{2}{n+1}$. Să se arate că*

$$|F(1) - 1| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Pentru început vom prezenta două rezultate ajutătoare relativ cunoscute.

PROPOZIŢIA 1. *Pentru fiecare $u \geq 0$ are loc inegalitatea $1 + u \leq e^u$.*

*Demonstraţie.* Fie funcţia $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $f(u) = e^u - u - 1$. Cum $f'(u) = e^u - 1 \geq 0, \forall\ u \geq 0$ rezultă, în baza monotoniei funcţiei exponenţiale, că $f$ este crescătoare. Cum $f(0) = 0$, atunci $0 \leq u \Rightarrow f(0) \leq f(u)$, adică $e^u - u - 1 \geq 0$. □

PROPOZIŢIA 2. *Pentru fiecare $u \in [0, 1]$ are loc inegalitatea $e^u \leq e \cdot u + 1$.*

*Demonstraţie.* Aplicând teorema lui Lagrange funcţiei $e^u$ pe intervalul $[0, u]$ cu $u \leq 1$ obţinem: $e^u - 1 = e^c \cdot u$, unde $0 < c < 1$. De aici rezultă că $e^u - 1 \leq e \cdot u$, deoarece $c \in (0, 1)$. □

**Generalizare.** O primitivă a funcţiei $f$ este $\displaystyle\int_0^x f(t)dt$ şi toate primitivele lui $f$ sunt de forma

$$\int_0^x f(t)dt + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Din $F(0)=-\dfrac{2}{n+1}$ obţinem $C=-\dfrac{2}{n+1}$, deci

$$F(x)=\int\limits_0^x f(t)dt-\frac{2}{n+1}=\int\limits_0^x e^{t^n}dt-\frac{2}{n+1}.$$

Atunci

$$F(1)=\int\limits_0^1 e^{t^n}dt-\frac{2}{n+1}$$

şi obţinem că:

$$|F(1)-1|\leq\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow 1-\frac{1}{n+1}\leq F(1)\leq 1+\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{1}{n+1}\leq\int\limits_0^1 e^{t^n}dt-\frac{2}{n+1}\leq 1+\frac{1}{n+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1+\frac{1}{n+1}\leq\int\limits_0^1 e^{t^n}dt\leq 1+\frac{3}{n+1}.$$

Să demonstrăm că $1+\dfrac{1}{n+1}\leq\displaystyle\int\limits_0^1 e^{t^n}dt,\ \forall\ t\in[0,1]$. Cum $t\in[0,1]$, atunci $t^n\in[0,1]$ şi luând $u=t^n$ în Propoziţia 1, obţinem că $1+t^n\leq e^{t^n}$ implică

$$1+\frac{1}{n+1}\leq\int\limits_0^1 e^{t^n}dt.$$

Arătăm că are loc şi cealaltă inegalitate şi anume

$$\int\limits_0^1 e^{t^n}dt\leq 1+\frac{3}{n+1},\ t\in[0,1].$$

Atunci $t^n\in[0,1]$ şi alegând $u=t^n$ în Propoziţia 2, rezultă că

$$e^{t^n}\leq e\cdot t^n+1\Rightarrow\int\limits_0^1 e^{t^n}dt\leq\int\limits_0^1(e\cdot t^n+1)dt=\frac{e}{n+1}+1\leq\frac{3}{n+1}+1.$$

Observaţie. Dacă $n=2014$ se obţine Problema 26982 din G.M.-B nr. 10/2014.

**REFERENCES**

[1] V. Pop, V. Lupşor, (coord.), *Matematică pentru grupele de performanţă, clasa a XII-a*, Editura Dacia Educaţional, Cluj-Napoca, 2004.
[2] Gh. Sireţchi, *Calcul diferenţial şi integral, vol. I şi II*, Ed. Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
[3] Gazeta Matematică Seria B, nr. 10/2014.

*Student, UBB, Cluj-Napoca*