DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 35 (2017), Pages 33-44

APLICAŢIE METODICĂ A SEPARĂRII TOPOLOGICE A MULŢIMILOR $\mathbb{Q}$ ŞI $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$

ANCA GRAD

Abstract. The lecture entitled Calculus 1 presented to the students majoring in Mathematics aims to synthesise all the notions and results learned during the high-school. The most important purpose is for the students to be able to rationalize formally, using mathematical concepts rather than just numbers. The strict separation between the sets of rational and irrational numbers proves to be a very useful tool in studying existence and convergence of sequences whose general term is not defined explicitly. This article presents the interesting topological behavior of both the sets of rational and irrational numbers. Morover, it contains a simple yet important proof for the existence of monotone sequences of either rational or irrational numbers converging to each real number. Particular examples complete the paper.

MSC 2000. 54H25.
Key words. Rational and irrational numbers, topology, strict separation, convergence.

1. INTRODUCERE

Pe parcusul anilor de liceu în special, elevii constată că materia în sine pare defalcată în mai multe parţi: algebră, geometrie şi analiză. Ele nu sunt însă deloc independente, ci puternic interdependente. În articolul de faţă prezentăm un astfel de caz, în care noţiuni specifice algebrei, cum sunt cele de numere raţionale şi iraţionale, sunt folosite pentru a demonstra fenomene interesante specifice analizei matematice.

Principalul rol al cursurilor prezentate sudenţilor anului întâi de la specializarea Matematică din semestrul întâi, pe lângă cel de sintetizare a tuturor noţiunilor acumulate pe parcursul liceului, este acela de a crea o lejeritate în utilizarea raţionamentelor formale care folosesc variablie, nu neapărat numere concrete. Înţelegerea temeinică a noţiunilor topologice ataşate unei mulţimi, cum ar fi: interiorul, exteriorul, frontierea, mulţimea punctelor de aderenţă (închidere), mulţimea punctelor de acumulare reprezintă primul obiectiv al unui curs de analiză matematică. Un exemplu elegant de testare al acestei înţelegeri este prezentat în cele ce urmează. De asemenea, va fi demonstrată existenţa unor şiruri (monotone, respectiv nemonotone) de numere raţionale, sau iraţionale, sau mixte, (a căror convergenţă este demonstrată în absenţa formulării explicite a termenului general), convergente către un număr real arbitrar.

2. PRELIMINARII TEORETICE

2.1. Noţiuni de topologie. Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ un punct şi $r > 0$. Numim **bilă de centru x_0 şi rază** r, intervalul centrat în punctul x_0, de lungime $2r$, deci

$$B(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\}.$$

Folosirea acestei notaţii se justifică mai ales atunci când se trece la spaţii vectoriale multidimensionale, în particular, în $\mathbb{R}^3$ bila (definită prin înlocuirea modulului cu norma Euclidiană), devine chiar sfera centrată în punctul x_0 de rază r.

Acestă bilă reprezintă de fapt piatra de temelie care stă la baza tuturor rezultatelor clasice ale analizei matematice. Ea admite extinderi şi la capetele axei reale. Astfel pentru $r > 0$, vom folosi următoarele noţiuni: bilă centrată în ∞ de rază r, mulţimea

$$B(\infty, r) = (r, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$$

şi bilă centrată în $-\infty$ de rază r, mulţimea

$$B(-\infty, r) = [-\infty, -r) = \{x \in \mathbb{R} : x < -r\}.$$

O generalizare a acestor intervale centrate în jurul unui punct o reprezintă vecinătăţile.

Definiţia 1. *O submulţime $V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ este o* **vecinătate** *a punctului $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ dacă*

$$\exists r > 0 \text{ astfel încât } B(x_0, r) \subseteq V.$$

Mulţimea tuturor vecinătăţilor punctului x_0 va fi notată cu $\mathcal{V}(x_0)$.

Fie $D \subseteq \mathbb{R}$ o submulţime de numere reale. Elementul $y \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de aderenţă** sau **de închidere** al mulţimii D dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \text{ are loc } V \cap D \neq \emptyset.$$

Mulţimea tuturor punctelor de aderenţă ale mulţimii D se notează cu clD. Elementul $y \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **punct de acumulare** al mulţimii D dacă

$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \text{ are loc } V \cap D \backslash \{y\} \neq \emptyset.$$

Mulţimea tuturor punctelor de acumulare ale mulţimii D se notează cu D'. Punctul $x_0 \in D$ se numeşte **punct izolat** al mulţimii D dacă

$$\exists V \in \mathcal{V}(x_0) \text{ astfel încât } V \cap D = \{x_0\}.$$

Mulţimea tuturor punctelor izolate ale mulţimii D se notează cu $Izo(D)$. Se demonstrează uşor că

$$D \cap D' = D \backslash IzoD. \tag{1}$$

Punctul $y \in D$ se numeşte **punct interior** al mulţimii D dacă

$$D \in \mathcal{V}(y),$$

sau, echivalent
$$\exists V \in \mathcal{V}(y) \text{ astfel încât } V \subseteq D.$$
Mulţimea tuturor punctelor interioare ale mulţimii D se notează cu $int(D)$. Punctul $y \in \mathbb{R}$ se numeşte **punct exterior** al mulţimii D dacă
$$\mathbb{R}\backslash D \in \mathcal{V}(y),$$
sau, echivalent
$$\exists V \in \mathcal{V}(y) \text{ astfel încât } V \subseteq \mathbb{R}\backslash D.$$
Mulţimea tuturor punctelor exterioare ale mulţimii D se notează cu $ext(D)$.

OBSERVAŢIA 1. *Pentru introducerea sau demonstrarea unor proprietăţi topologice ale mulţimilor, se poate folosi în mod echivalent limbajul cu bile sau cel cu vecinătăţi. Deoarece*
$$\forall V \in \mathcal{V}(y) \Longleftrightarrow \forall r > 0...B(y,r)$$
şi
$$\exists V \in \mathcal{V}(y) \Longleftrightarrow \exists r > 0...B(y,r).$$

2.2. Şiruri de numere reale.

OBSERVAŢIA 2. *Specificăm că pe parcusul acestui articol, mulţimea numerelor naturale este* $\mathbb{N} = \{1, 1+1, 1+1+1, ...\}$. *Astfel, cititorul trebuie să ia în considerare că în toate definiţiile, atunci când vorbim despre mulţimea numerelor naturale,* 0 *nu îi aparţine.*

Fie $k \in \mathbb{N}$. Mulţimea tuturor numerelor naturale mai mari sau egale cu k va fi notată prin
$$N_k := \{n \in \mathbb{N} : n \geq k\}.$$
Un **şir de numere reale** este o funcţie
$$x : \mathbb{N}_k \to \mathbb{R},$$
pentru care folosim, pentru fiecare $n \in \mathbb{N}_k$, notaţia
$$x(n) := x_n.$$
Notaţiile uzuale folosite pentru un şir de numere reale sunt:
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}_k} = (x_n)_{n\geq k} = (x_n).$$
Pe parcusul acestui articol, vom considera $k = 1$ şi vom folosi notaţia simplă (x_n) pentru un şir de numere reale. Menţionăm că am ales această particularizare doar din motive de simplificare a expunerii.

Elementul $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ se numeşte **limită** a şirului de numere reale (x_n) dacă,
$$\forall V \in \mathcal{V}(x_0), \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n \in V.$$
Această definiţie se exprimă în mod echivalent, prin bile astfel:
$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n \in B(x_0, \varepsilon).$$

Constatăm că atunci când renunţăm la vecinăţaţi, pentru a caracteriza limita unui şir de numere reale avem nevoie de trei cazuri distincte.

Teorema 1. *Elementul* $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ *este limita şirului de numere reale* (x_n) *dacă şi numai dacă*

1) *pentru cazul* $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, |x_n - x_0| < \varepsilon;$$

2) *pentru cazul* $x_0 = \infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n > \varepsilon;$$

3) *pentru cazul* $x_0 = -\infty$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ astfel încât } \forall n \geq n_0, x_n < -\varepsilon.$$

3. CARACTERIZĂRI TOPOLOGICE ALE MULŢIMILOR NUMERELOR RAŢIONALE ŞI IRAŢIONALE

Mulţimea numerelor raţionale, şi respectiv cea a celor iraţionale, sunt intens studiate la nivel de teoria numerelor, prezentând proprietăţi remarcabile. În cele ce urmează vom aborda aceste două mulţimi din punct de vedere topologic.

Definiţia 2. *Mulţimea numerelor raţionale, este*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N} \right\}.$$

iar mulţimea numerelor iraţionale este complementara ei, deci $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$.

Ele se bucură de următoarea proprietate de separare strictă

Teorema 2. *Fie* $x < y \in \mathbb{R}$. *Atunci*

(2) $$\text{există } t \in \mathbb{Q} \text{ astfel încât } x < t < y$$

şi

(3) $$\text{există } s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \text{ astfel încât } x < s < y$$

Propoziţia 1. *Relativ la mulţimea numerelor reale (deci nu în* $\overline{\mathbb{R}}$*)*

$$int\mathbb{Q} = \emptyset = int(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}).$$

Demonstraţie. Presupunem prin reducere la absurd că $int\mathbb{Q} \neq \emptyset$, deci

$$\exists y \in int\mathbb{Q}.$$

Din definiţia punctelor interiorare, rezultă că există $r_y > 0$ astfel încât

(4) $$B(y, r_y) \subseteq \mathbb{Q}.$$

În particular constatăm că $y < y + r_y$, şi aplicând Teorema 2, 2) există

$$s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \text{ astfel încât } y < s < y + r_y.$$

Astfel

(5) $$s \in B(y, r_y) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Din (4) şi (5) obţinem contradicţia dorită.

Demontraţia pentru $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se face analog, prin aplicarea Teoremei 2, 1). $\square$

PROPOZIŢIA 2. *Relativ la mulţimea numerelor reale (deci nu în $\overline{\mathbb{R}}$)*

$$ext\mathbb{Q} = \emptyset = ext(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}).$$

Demonstraţie. Deoarece pentru o mulţime arbitrară $D \subseteq \mathbb{R}$, are loc egalitatea

$$intD = ext(\mathbb{R}\backslash D),$$

constatăm prin aplicarea Propoziţiei 1 că

$$ext\mathbb{Q} = int\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \emptyset$$

şi

$$ext\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = int(\mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})) = int\mathbb{Q} = \emptyset.$$

$\square$

PROPOZIŢIA 3. *Relativ la mulţimea numerelor reale (deci nu în $\overline{\mathbb{R}}$)*

$$bd\mathbb{Q} = cl\mathbb{Q} = \mathbb{R} = bd(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = cl(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}).$$

Demonstraţie. Din punct de vedere conceptual deomonstraţiile pentru $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sunt similare. Pentru această propoziţie vom face demonstraţiile doar pentru mulţimea $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Cea mai simplă abordare este să folosim următoarea egalitatea care este valabilă pentru orice submulţime arbitrară $D \subseteq \mathbb{R}$:

$$intD \cup bdD \cup extD = \mathbb{R}. \tag{6}$$

Prin aplicarea Propoziţiilor 1 şi 2 găsim

$$int\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cup ext\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \emptyset,$$

astfel, din (6) concluzionăm că:

$$bd\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}\backslash\emptyset = \mathbb{R}.$$

Atunci,

$$cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = int\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \cup bd\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \emptyset \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Din motive metodice vom da şi **demonstraţia directă** pentru frontieră, în cele ce urmează. Astfel, considerăm un element $y \in \mathbb{R}$ arbitrar ales, şi vom demonstra că $y \in bd\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, care se scrie conform definiţiei, astfel

$$\forall r > 0 \text{ are loc } B(y,r) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \neq \emptyset \text{ şi } B(y,r) \cap \mathbb{R}\backslash(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = B(y,r) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset.$$

Fie $r > 0$ arbitrar ales. Atunci $y < y + r$ şi aplicând Teorema 2 de separare, există $t \in \mathbb{Q}$ şi $s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ astfel încât:

$$y < t < y + r \text{ deci } t \in B(y,r) \cap \mathbb{Q}$$

şi

$$y < s < y + r \text{ deci } s \in B(y,r) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}.$$

Deoarece r a fost ales arbitrar, obţinem că $y \in bd\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Ţinând cont de faptul că y a fost arbitrar ales în $\mathbb{R}$, concluzionăm că

$$bd\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}.$$

Automant, $cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.

□

PROPOZIŢIA 4. *Relativ la mulţimea numerelor reale (deci nu în* $\overline{\mathbb{R}}$*)*

$$izo\mathbb{Q} = izo\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \emptyset$$

Demonstraţie. Să presupunem prin reducere la absurd că există $x \in izo\mathbb{Q}$, atunci,

$$\exists r > 0 \text{ a.î. } B(x,r) \cap \mathbb{Q} = \{x\}.$$

Deoarece $x < x + r$, din Teorema 2, $\exists t \in \mathbb{Q}$ a.î. $x < t < x + r$. Astfel $x \neq t$ şi $\{x,t\} \subseteq B(x,r) \cap \mathbb{Q}$, conducând la o contradicţie. Demonstraţia pentru $izo\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se face analog.

□

PROPOZIŢIA 5. *Relativ la mulţimea numerelor reale (deci nu în* $\overline{\mathbb{R}}$*)*

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}' = \mathbb{R}.$$

Demonstraţie. Vom folosi egalitatea (valabilă în $\mathbb{R}$) de legătură între închiderea şi interiorul unei mulţimi:

$$\mathbb{Q}' = cl\mathbb{Q}\backslash izo\mathbb{Q}$$

care va conduce, prin Propoziţiile 3 şi 4 imediat la concluzia

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{R}\backslash\emptyset = \mathbb{R}.$$

Demonstraţia pentru $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ se face analog. □

PROPOZIŢIA 6. *Relativ la mulţimea numerelor reale extinsă (deci în* $\overline{\mathbb{R}}$*)*

$$cl\mathbb{Q} = cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \overline{\mathbb{R}} \quad \text{şi} \quad \mathbb{Q}' = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}' = \overline{\mathbb{R}}$$

Demonstraţie. Vom demonstra că

$$-\infty \in cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

folosing metoda reducerii la absurd. Presupunem că

$$-\infty \notin cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

deci, există $r > 0$ astfel încât

$$[-\infty, -r) = B(-\infty, r) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \emptyset. \tag{7}$$

Dar $-r - 1 < -r$, deci, aplicând teorema de separare 2

$$\exists s \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{a.î.} \quad -r - 1 < s < -r,$$

deci

$$s \in B(-\infty, r) \cap \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \tag{8}$$

Relaţiile 7 şi 8 conduc la contradiţie. Astfel

$$-\infty \in cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

Analog se poate demonstra că

$$-\infty \in cl\mathbb{Q} \quad \text{şi} \quad \infty \in cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{şi} \quad \infty \in cl\mathbb{Q}.$$

Deoarece atât mulţimea punctelor de închidere, cât şi cea a punctelor de acumulare atunci când sunt considerate relativ la $\overline{\mathbb{R}}$ conţin ca submulţimi mulţimea punctelor de închidere, respectiv mulţimea punctelor de acumulare relativ la $\mathbb{R}$, din Propoziţiile 3 şi 5 ştim că $\mathbb{R}$ este de fapt egală cu aceste mulţimi considerate doar în $\mathbb{R}$. Din cele deomstrate mai sus, rezultă că atunci când considerăm noţiunile relativ la mulţimea numerelor reale extinsă, pentru $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, atunci când vorbim de închidere şi puncte de acumulare se adaugă capetele de la ∞ şi $-\infty$. Astfel

$$\overline{\mathbb{R}} = cl\mathbb{Q} = \mathbb{Q}' = cl\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}'.$$

□

4. ŞIRURI DE NUMERE RAŢIONALE ŞI IRAŢIONALE

Elevii de liceu sunt obişnuiţi să abordeze şiurirle de numere reale prin calcularea cu diverse procedee specificie a limitei. În aceste cazuri se lucrează cu exemple concrete, în care şirurile au specificată explicit formula termenului general x_n, cu $n \in \mathbb{N}$. Atunci când termenului general nu este dat explicit, studiul devine mai greu, dar în acelaşi timp mai interesant.

Următoarea teoremă garantează existenţa şi convergenţa unor şiruri de numerere raţionale şi respectiv iraţionale către un număr real fixat, având sau nu proprietăţi de monotonie. În demonstraţia ei se observă clar că nu este deloc nevoie de exprimarea explicită a termenului general a şirurilor, în schimb vom folosi caracterizările numerelor raţionale şi respectiv iraţionale.

Teorema 3. *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$. Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*

a) *există un şir strict crescător de numere raţionale, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$.*
b) *există un şir strict descrescător de numere raţionale, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = x_0$.*
c) *există un şir alternant de numere raţionale $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = x_0$.*
d) *există un şir strict crescător de numere iraţionale, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = x_0$.*
e) *există un şir strict descrescător de numere iraţionale, $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = x_0$.*
f) *există un şir alternant de numere iraţionale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = x_0$.*

Demonstraţie. Ideea pentru demonstraţiile tuturor subpunctelor teoremi rezidă în bilele centrate în x_0 cu rază $\frac{1}{n}$, unde $n \in \mathbb{N}$. Reamintim că

$$B\left(x_0, \frac{1}{n}\right) = \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right).$$

De asemenea, folosim (cel mai clasic şir cu limita 0), şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ cu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

b) Vom construi pas cu pas, inductiv, şirul dorit. Ştim că $x_0 + \frac{1}{2} < x_0 + 1$, deci din Teorema (de seprare) 2

$$\exists b_1 \in \mathbb{Q} \quad \text{a.î.} \quad x_0 + \frac{1}{2} < b_1 < x_0 + 1.$$

Apoi, folosind inegalitatea $x_0 + \frac{1}{3} < x_0 + \frac{1}{2}$ şi aplicând din nou Teorem 2, constatăm că

$$\exists b_2 \in \mathbb{Q} \quad \text{a.î.} \quad x_0 + \frac{1}{3} < b_2 < x_0 + \frac{1}{2}.$$

Continuând inductiv, pentru orice $n \in \mathbb{N}$ este adevărată inegalitatea

$$x_0 + \frac{1}{n+1} < x_0 + \frac{1}{n},$$

căreia, dacă îi aplicăm Teorema 2 găsim

$$\exists b_n \in \mathbb{Q} \quad \text{a.î.} \quad x_0 + \frac{1}{n+1} < b_n < x_0 + \frac{1}{n}. \tag{9}$$

Am construit astfel şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu proprietatea că

$$...x_0 + \frac{1}{n+1} < b_n < x_0 + \frac{1}{n} < b_{n-1} < x_0 + \frac{1}{n-1} < b_{n-1} < ... < b_1 < x_0 + \frac{1}{1}$$

deci

$$...b_n < b_{n-1} < .... < b_2 < b_1$$

astfel, acest şir este strict descrescător şi este format exclusiv din numere raţionale. Trecând la limita în inegalitatea 9 concluzionăm:

$$x_0 = \lim_{n\to\infty}\left(x_0 + \frac{1}{n+1}\right) \leq \lim_{n\to\infty} b_n \leq \lim_{n\to\infty}\left(x_0 + \frac{1}{n}\right) = x_0.$$

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} b_n = x_0.$$

Deci şirul construit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisface cerinţele problemei.

f) Vom aplica un procedeu asemănător cu cel de la punctul b), prin construirea pas cu pas a şirului alternant, făcând de aceasta dată ”salturi” în jurul lui x_0. Astfel, considerând $n \in \mathbb{N}$, dacă n este par, deci $n = 2k$, cu $k \in \mathbb{N}$, folosind inegalitatea

$$x_0 + \frac{1}{2k-1} < x_0 + \frac{1}{2k}$$

aplicând teorema de separare 2 găsim că există

$$f_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \quad \text{a.î.} \quad x_0 + \frac{1}{2k-1} < f_n < x_0 + \frac{1}{2k}. \tag{10}$$

Atunci, pentru $n+1$, deci $2k+1$, care este impar, putem folosi inegalitatea

$$x_0 - \frac{1}{2k} < x_0 - \frac{1}{2k+1}$$

din care, prin aplicarea Teoremei 2, constatăm că

$$\exists f_{n+1} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \quad \text{a.î.}$$

$$f_n \in \mathbb{Q}, \quad \text{a.î.} \quad x_0 - \frac{1}{2k} < f_{n+1} < x_0 - \frac{1}{2k-1}. \tag{11}$$

Aplicând teorema cleştelui prin trecerea la infinit a inegalităţii (10), concluzionăm că subşirul indicilor pari satisface

$$\lim_{k\to\infty} f_{2k} = x_0.$$

Cu ajutorul aceleaşi proceduri, de data aceasta pentru subşirul indicilor impari, folosind inegalitatea (11) concluzionăm că

$$\lim_{k\to\infty} f_{2k+1} = x_0.$$

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} f_n = x_0.$$

Deci şirul construit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ satisface cerinţele problemei, având limita x_0 şi fiind alternant, deoarece pentru orice $k \in \mathbb{N}$ are loc inegalitatea

$$f_{2k+1} < x_0 < f_{2k}.$$

Toate celelalte subpuncte se demonstrează similar cu ele explicitate mai sus. □

Observaţia 3. *Dacă $a \in \mathbb{Q}$ atunci şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu termenul general*

$$a_n = a - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir strict crescător de numere raţionale convergent către a. Şirul $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu termenul general

$$b_n = a + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir strict descrescător de numere raţionale convergent către a. Şirul $(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ cu termenul general

$$c_n = a + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir alternant de numere raţionale convergent către a

Observaţia 4. *Dacă* $a \in \mathbb{Q}$ *atunci şirul* $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *cu termenul general*

$$d_n = a - \frac{1}{n\sqrt{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir strict crescător de numere iraţionale convergent către a*. Şirul* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *cu termenul general*

$$e_n = a + \frac{1}{n\sqrt{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir strict descrescător de numere raţionale convergent către a*. Şirul* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *cu termenul general*

$$f_n = a + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir alternant de numere raţionale convergent către a

Observaţia 5. *Dacă* $i \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *atunci şirul* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *cu termenul general*

$$\alpha_n = i - \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir strict crescător de numere iraţionale convergent către a*. Şirul* $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *cu termenul general*

$$\beta_n = i + \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir strict descrescător de numere iraţionale convergent către a*. Şirul* $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *cu termenul general*

$$\zeta_n = i + \frac{(-1)^n}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

este un exemplu clasic de şir alternant de numere iraţionale convergent către a

Observaţia 6. *Dacă* $j \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$*, atunci este mai greu de dedus expresia explicită a termenului general al unui şir de numere raţionale (crescător, descrescător sau altenant), care să aibă limita* j*. Un exemplu de şir de numere raţionale care are ca limită* j *este* $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ *, cu termenul general*

$$\gamma_n = \frac{[nj]}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

unde prin $[x]$ *se înţelege partea întreagă a lui* x*. Convergenţa acestui şir se demonstrează folosind bine-cunoscuta inegalitate care caracterizează partea întregă a unui număr real:*

$$x \leq [x] < x + 1$$

şi teorema cleştelui pentru şirul $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *Demonstraţia trebuie tratată separat pe cazul pozitiv şi respectiv cel negativ. Trebuie remarcat că un astfel de şir este departe de a fi monoton sau alternant. Spre exemplu, dacă considerăm*

$$j = \sqrt{2},$$

atunci şirul $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *având termenul general*

$$\gamma_n = \frac{[nj]}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

foloseşte

$$[1\sqrt{2}] = 1, [2\sqrt{2}] = 2, [3\sqrt{2}] = 4, [4\sqrt{2}] = 5, [5\sqrt{2}] = 7, [6\sqrt{2}] = 8,$$

şi ia valorile

$$\frac{[1\sqrt{2}]}{1} = 1, \frac{[2\sqrt{2}]}{2} = 1, \frac{[3\sqrt{2}]}{3} = \frac{4}{3}, \frac{[4\sqrt{2}]}{4} = \frac{5}{4}, \frac{[5\sqrt{2}]}{5} = \frac{7}{5}, \frac{[6\sqrt{2}]}{6} = \frac{8}{6}$$

Astfel, termenii şirului se află în următoarele relaţii

$$1 = 1 < \frac{4}{3} > \frac{5}{4} < \frac{7}{5} < \frac{8}{6} \ldots.$$

şirul continuând neordonat din loc în loc.

În concluzie, pentru un astfel de caz, existenţa şi monotonia unui şir (fie el de numere raţionale sau iraţionale), este garantată uşor doar cu ajutorul Teoremei 3.

De remarcat este faptul că separarea celor două mulţimi $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ permite, prin procedee asemnănătoare celor folosite în demonstraţia teoremei anterioare, construirea unor şiruri convergente cu proprietăţi bune de monotonie, cu structură maleabilă în raport cu cerinţele iniţiale.

Observaţia 7. *Cazul în care* $x_0 \in \{\pm\infty\}$ *nu necesită un efort mare în demonstraţii. Vom trata aceste cazuri doar prin prisma unor exemple evidente. Astfel* $(n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Q$ *şi* $\left(n\sqrt{2}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ *sunt şiruri strict cresųatoare cu limita* ∞, *iar luate cu - sunt strict descrescătoare şi au limita* $-\infty$.

Remarcăm de asemenea că nu există şir descrescător cu limita ∞, *nici şir strict crescător cu limita* $-\infty$.

Aspectele prezentate în acest articol reprezintă noţiuni elementare de analiză matematică, iar în demonstrarea lor pot fi folosite orice resurse bibliografice în acest domeniul. Din vasta oferta publicistică în acest domeniu doresc să direcţionez cititorii către nişte cărţi atent redactate şi documentate, din care se învaţă Analiza Matematică la Facultatea de Mateamtică şi Informatică la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj Napoca [3], [4], [2], [1].

În ceea ce priveşte aplicaţii ale aspectelor teoretice prezentate în acest articol, recentul articol [5] prezintă exemple în care separarea mulţimilor numerelor raţionale de către cea a celor iraţionale este folosită pentru generarea unor exemple interesante şi atipice de funcţii continue.

Acest articol nu ar fi existat fără îndrumarea competentă şi atentă a domnului Prof. univ. dr. emerit D. I. Duca, care a şlefuit de-a lungul a zeci de ani minţi tinere de matematicieni la cursurile de Analiză Matematică. Îi mulţumesc din suflet pentru încrederea pe care mi-a acordat-o atât pe plan profesional cât şi personal.

BIBLIOGRAFIE

[1] D. Andrica, D.I. Duca, I. Purdea, I. Pop, *Matematica de bază*, Editura Studium, Cluj-Napoca, 2005.
[2] W.W. Breckner, *Analiză funţională*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2009.
[3] D.I. Duca, *Analiză matematică* (vol. I), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013.
[4] D.I. Duca, E. Duca, *Exerciţii şi probleme de Analiză matematică* (vol. 1 şi 2), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2009.
[5] A. Grad, *Abordare metodică a problemei continuităţii unei funcţii reale*, Lucrările Simpozionului de Matematică "In Memoriam Profesor Ioan Boţ", Ed. V. Solschi şi T. Lazăr, Editura Citadela Satu Mare, 2018.

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: ancagrad@math.ubbcluj.ro