DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 35 (2017), Pages 23-28

PĂTRATELE PERFECTE ÎN PREGĂTIREA ELEVILOR DE GIMNAZIU PENTRU OLIMPIADE ŞI CONCURSURI

MĂDĂLINA DANCS

Pregătirea elevilor pentru olimpiadele şi concursurile de matematică presupune parcurgerea în detaliu a fiecărei teme din programă.

În programa de olimpiadă şcolară la matematică atât etapa locală cât şi etapa judeţeană, naţională, apare tema **Pătrate perfecte**.

Grigore Moisil afirma că "un profesor bun e cel care te face ca lucrurile grele să-ţi pară mai uşoare".

Se remarcă faptul că în subiectele de la olimpiadă apare deseori un exerciţiu referitor la pătrate perfecte.

Un număr natural n se numeşte pătrat perfect dacă există k un număr natural pentru care $n = k^2$.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2, \ldots$, deci 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36,... sunt pătrate perfecte.

Exemplele pot continua dacă luăm orice număr natural k, apoi calculăm k^2 şi astfel îl obţinem pe n, care este pătrat perfect.

Din multitudinea de proprietăţi, teoreme, enunţuri şi aplicaţii referitoare la pătrate perfecte ne propunem să analizăm faptul că suma numerelor impare este un pătrat perfect, demonstraţia că un număr este rational şi alte aplicaţii extrase din subiecte date la olimpiade şi concursuri.

Orice pătrat perfect nenul poate fi scris ca sumă de numere naturale impare consecutive, cu primul termen al sumei 1.

Exemplu: $4 = 1 + 3$; $9 = 1 + 3 + 5$; $16 = 1 + 3 + 5 + 7$.

În caz general

$$k^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + (2k - 1),\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Metode de rezolvare a calculului sumei primelor n numere impare

1. Metoda contorului

Fie suma numerelor impare, k număr natural nenul.

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1).$$

Observăm că numerele sunt din 2 în 2 şi astfel avem:

$$
\begin{aligned}
1 &= 2\cdot 1 - 1\\
3 &= 2\cdot 2 - 1\\
5 &= 2\cdot 3 - 1\\
&\ldots\ldots\ldots\\
2k-1 &= 2\cdot k - 1,\ k\in\mathbb{N}^*\\
\hline
S &= 1+3+5+\ldots+2k-1 = 2(1+2+3+\ldots+k) - 1\cdot k\\
&= 2\cdot\frac{k(k+1)}{2} - k = k(k+1) - k = k(k+1-1) = k\cdot k = k^2
\end{aligned}
$$

2. Metode pitagorice

Notă istorică

Pitagora, acum 2500 de ani, a înfiinţat la Crotona, în sudul Italiei, o şcoală filosofică: Şcoala pitagoreică. Aici a avut peste 600 de discipoli. Ca semn de recunoaştere, pitagoreicii aveau pentagonul stelat sau pentagrama. Literele scrise în vârfurile pentagonului corespundeau cuvântului salut. Ei considerau că lucrurile sunt create din numere: Numărul guvernează lumea.

Numerele erau reprezentate sub forma unor puncte aşezate în diferite moduri obţinând diferite figuri geometrice. Astfel apar numerele figurative, realizându-se pentru prima dată o legătură între aritmetică şi geometrie. Fiecare punct simbolizează o unitate, un atom material, care este înconjurat de un câmp gol.

Ei considerau:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet\\
 & & & & & & \downarrow\\
\bullet & \rightarrow & \bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet\\
 & & & & & & \downarrow\\
 & & & & \downarrow & & \downarrow\\
\bullet & \rightarrow & \bullet & & \bullet & & \bullet\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\bullet & & \bullet & & \bullet & & \bullet
\end{array}
$$

$$1^2 = 1,\ 2^2 = 1+3,\ 3^2 = 1+3+5,\ 4^2 = 1+3+5+7$$

Generalizând rezultă

$$1+3+5+\ldots+(2k-1) = k^2.$$

De asemenea, pitagoreicii mai utilizau şi metoda denumită "stadion" pentru a obţine pătrate perfecte.

De exemplu, pentru a determina pe 7^2, reprezentau numerele de la 1 la 7 şi apoi de la 7 la 1 astfel:

$$\begin{array}{cccccccc} \rightarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \\ & & & & & & & 7 \\ \leftarrow & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \end{array}$$

Se intră pe stadion cu numărul 1, apoi la cotitură se află numărul 7 al cărui pătrat îl calculăm şi se iese de pe stadion tot cu numărul 1. Astfel, vor avea:

$$7^2 = 49, \quad 7^2 = 2(1+2+3+4+5+6)+7$$

3. $S_{\text{primelor } n \text{ nr. impare}} = S_{\text{primelor } n \text{ nr. naturale}} - S_{\text{primelor } n \text{ nr. pare}}$

Fie S_n suma primelor n numere naturale, S_{2k} suma primelor n numere pare.

$$\begin{aligned} S_n &= 1+2+3+\ldots+n \\ S_{2k} &= 2+4+6+\ldots+2\cdot k,\ k\in\mathbb{N} \\ S_{\text{nr. impare}} &= (1+2+3+\ldots+n)+(2+4+6+\ldots+2k) \\ &= \frac{n(n+1)}{2}+2\cdot\frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}+k(k+1) \end{aligned}$$

Exemplu. Să se calculeze $1+3+5+\ldots+2007$.

Rezolvare.

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+2007 &= (1+2+3+\ldots+2007) \\ &\quad -(2+4+6+\ldots+2006) \\ &= \frac{2007\cdot 2008}{2} - 2\cdot\frac{1003\cdot 1004}{2} \\ &= 1004\cdot(2007-1003) = 1004^2 \end{aligned}$$

În calitate de evaluator la olimpiada locală şi judeţeană, am obsevat că această metodă e preferată de elevi în rezolvarea subiectului.

4. Metoda lui Gauss

$$S = 1+3+5+\ldots+2k-5+2k-3+2\cdot k-1.$$

Observăm că avem k termeni.

$$S = 2k-1+3k-3+2k-5+\ldots+5+3+1$$

$$2S = \underbrace{2k-1+2k-3+2k-5+\ldots+5+3+1}_{\text{de k ori}}$$

$$2S = 2k\cdot k \Rightarrow S = k^2.$$

5. Aplicarea formulei de la progresii aritmetice

$$S_n = [(t_i+t_f)\cdot n]:2,$$

unde

t_i – primul termen
t_f – ultimul termen
n – numărul de termeni
Fie $S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}^*$. Aşadar

$$t_i = 1,\ t_f = 2k - 1,\ n = k \text{ (termeni)}$$

$$S = \frac{(1 + 2k - 1) \cdot k}{2} = \frac{2k \cdot k}{2} = k^2$$

Deci, putem aplica direct faptul că $1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1 = k^2$.

Pentru a calcula numărul de termeni şi a afla forma generală a ultimului termen se poate aplica metoda contorului pentru a nu introduce termenul de raţie la clasa a V-a.

6. Gruparea termenilor

Grupăm primul termen cu ultimul, al doilea cu penultimul ş.a.m.d.

$$S = 1 + 3 + 5 + \ldots + 2k - 1,\ k \in \mathbb{N}^*$$

$$S = (1 + 2k - 1) + (3 + 2k - 3) + \ldots (\ldots)$$

Avem $\frac{k}{2}$ paranteze

$$S = 2k + 2k + \ldots + 2k = 2k \cdot \frac{k}{2} = k^2.$$

7. O altă metodă

$$1^2 = 1 - 1 \text{ numere impare}$$
$$2^2 = 4 - 2 \text{ numere impare}$$
$$3^2 = 9 - 3 \text{ numere impare}$$
$$4^2 = 16 - 4 \text{ numere impare}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$10^2 = 100 - 10 \text{ numere impare}$$
$$\ldots\ldots\ldots$$

şi aşa mai departe, adică pătratul numărului natural este egal cu suma atâtor numere impare consecutive, începând cu 1, câte unităţi are acel număr.

Calculul sumei primelor n numere impare este important pentru exerciţiile din clasa a VII-a.

Exemplu. Să se arate că numărul

$$a = \sqrt{1 + 3 + 5 + \ldots + 2009 + 2011 + 2013}$$

este raţional.

Rezolvare.

$1 + 3 + 5 + \ldots + 2009 + 2011 + 2013 = 1007^2$

$2k - 1 = 2013$

$2k = 2014$

$k = 1007$

$\sqrt{1 + 2 + 5 + \ldots + 2009 + 2011 + 2013} = \sqrt{1007^2} = 1007,\ 1007 \in \mathbb{N}^*$

Cunoaşterea noţunii de pătrat perfect este necesară în rezolvarea problemelor din Gazeta Matematică şi a problemelor date la examene, concursuri şi olimpiade.

Exerciţii rezolvate

1. a) Să se calculeze $1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$.
b) Arătaţi că numărul 2015^{2015} poate fi scris ca o sumă de 6 pătrate perfecte.

(S.G.M. 11/2015)

Rezolvare. a) $1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2$
$= 1 + 4 + 25 + 100 + 729 + 1156 = 2015$

b) $2015^{2015} = 2015^{2014} \cdot 2015$

$$\begin{aligned}
&= 2015^{2014} \cdot (1^2 + 2^2 + 5^2 + 10^2 + 27^2 + 34^2)\\
&= (2015^{1007})^2 \cdot 1^2 + (2015^{1007})^2 \cdot 2^2 + (2015^{1007})^2 \cdot 5^2\\
&+ (2015^{1007})^2 \cdot 10^2 + (2015^{1007})^2 \cdot 27^2 + (2015^{1007})^2 \cdot 34^2\\
&= (2015^{1007} \cdot 1)^2 + (2015^{1007} \cdot 2)^2 + (2015^{1007} \cdot 5)^2\\
&+ (2015^{1007} \cdot 10)^2 + (2015^{1007} \cdot 27)^2 + (2015^{1007} \cdot 34)^2
\end{aligned}$$

2. Fie numerele

$$A = 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2017$$

şi

$$B = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2017 + 3.$$

Arătaţi că A este pătrat perfect şi B nu este pătrat perfect.

(O.S.T. 2016)

Rezolvare

$2k - 1 = 2017$

$2k = 2018$

$k = 1009$

$A = 1009^2$ pătrat perfect

BIBLIOGRAFIE

[1] D. Bătineţu-Giurgiu, N. Ivăşchescu, *Olimpiadele şcolare cu rezolvări complete, toate judeţele, clasa a V-a*, Editura Carminis, Piteşti, 2010.
[2] D. Brânzei, *Matematică: Olimpiade şi concursuri şcolare*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2010.
[3] C. Chiteş, D. Chiteş, D. Heuberger, N. Muşuroia, *Teme suplimentare pentru clasa a V-a*, Ed. Corint, Bucureşti, 2012.
[4] A. Negrilă, *Matematică: Algebră şi Geometrie clasa a VII-a, semestrul I*, Ed. Paralela 45, Piteşti, 2013.
[5] C. Stănică, M. Perianu, I. Roşu, *Matematică*, Ed. Clubul Matematicienilor, Bucureşti, 2013.
[6] *Gazeta matematică*, Nr. 11/2015 şi *Suplimentul de exerciţii.*

Şcoala Gimnazială Romuli