DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 34(2016), pp. 33–40

PROBLEME INTERESANTE CU NUMERE NATURALE

Ramona Lucaci

Abstract. We present some problems with positive integers intending to increase pupils' interest in Mathematics, and also to develop their ability to connect the mathematical knowledge to real life. We include two problems from PISA tests, the Programme for International Student Assessment (PISA) being a triennial international survey which evaluates education systems by testing the skills and knowledge of 15-year-old pupils.

MSC 2000. 00A35, 97D99

Key words. natural numbers, PISA tests

1. INTRODUCERE

Elevii trebuie stimulaţi prin probleme care să le atragă atenţia şi care să le ofere satisfacţii atunci când, folosind indicaţiile profesorului sau prin forţe proprii, reuşesc să găsească soluţia corectă.

Problemele de divizibilitate sunt din categoria celor care îi determină pe elevi să îşi dezvolte raţionamentul şi să găsească metode originale de rezolvare. De aceea, am ales un număr de astfel de probleme, dar şi alte tipuri, fără a neglija problemele „cu text", care continuă să fie considerate dificile.

În final, prezentăm două probleme date la testele PISA (*Programme for International Student Assessment*), care se încadrează între cele cu numere naturale, dar care pornesc de la situaţii pe care elevii le pot întâlni în viaţa reală.

Generic, Programul Internaţional OECD pentru Evaluarea Elevilor - PISA - evaluează în ce măsură elevii aflaţi aproape de finalul educaţiei obligatorii deţin unele dintre competenţele-cheie, cunoştinţele şi deprinderile de bază esenţiale atât pentru continuarea studiilor, cât şi pentru participarea deplină la viaţa socială sau pentru integrarea pe piaţa muncii. PISA acoperă trei domenii principale: Ştiinţe, Matematică şi Citire/Lectură. Testele se desfăşoară o dată la trei ani şi se adresează elevilor de 15-16 ani.

Organizaţia pentru Cooperare şi Dezvoltare Economică (*Organisation for Economic Co-operation and Development* - OECD) a fost înfiinţată la 30 septembrie 1961 şi reprezintă un for interguvernamental dedicat identificării, aplicării şi evaluării politicilor publice dedicate dezvoltării economice şi stabilităţii sociale. România nu este încă membru OECD, dar este partener PISA, participând din anul 2001 la acest program iniţiat de OECD. Din păcate, rezultatele obţinute de elevii români nu sunt deloc lăudabile ([1]), fiind sub media ţărilor

OECD, ceea ce face necesar ca în cadrul orelor de matematică şi la cercurile de elevi să se propună şi probleme cu formulări de tip PISA.

2. DOUĂSPREZECE PROBLEME CU NUMERE NATURALE

1. Fie k un număr natural impar. Să se demonstreze că, pentru orice număr natural n

$$(1+2+\cdots+n)|(1^k+2^k+\cdots+n^k).$$

Soluţie.

Fie $k=2p+1$, p număr natural.

$1+2+\cdots+n=n(n+1)/2$, deci avem de arătat că

$$n(n+1)|2(1^{2p+1}+2^{2p+1}+\cdots+n^{2p+1}).$$

Scriind

$$S_n=2(1^{2p+1}+2^{2p+1}+\cdots+n^{2p+1})=$$
$$(1^{2p+1}+n^{2p+1})+(2^{2p+1}+(n-1)^{2p+1})+...+(n^{2p+1}+1^{2p+1})$$

şi aplicând formula $a^{2p+1}+b^{2p+1}=(a+b)(a^{2p}-a^{2p-1}b\ldots+b^{2p})$, obţinem că $n+1$ divide $2S_n$.

Dar $2S_n=2(S_{n-1}+n^{2p+1})=2S_{n-1}+2n^{2p+1}$, deci n divide de asemenea $2S_n$. Aşadar, n şi $n+1$ divid $2S_n$, şi cum n şi $n+1$ sunt prime între ele, rezultă că $n(n+1)) \mid 2(1^{2p+1}+2^{2p+1}+\cdots+n^{2p+1})$.

2. Să se arate că dacă $a\equiv b \pmod n$, atunci $a^n\equiv b^n (\operatorname{mod} n^2)$.

Soluţie.

$a\equiv b \pmod n$ dacă şi numai dacă $a=nq+r$, $b=np+r$ şi $0\le r<n$. Ridicăm la puterea n şi rezultă

$$a^n=n^nq^n+C_n^1n^{n-1}q^{n-1}r+...+n^2qr^{n-1}+r^n=Qn^2+r^n,$$
$$b^n=n^np^n+C_n^1n^{n-1}p^{n-1}r+...+n^2pr^{n-1}+r^n=Pn^2+r^n.$$

Urmează că a^n şi b^n dau acelaşi rest la împărţirea cu n^2.

3. Să se calculeze cel mai mare divizor comun al numerelor $n!+1$ şi $(n+1)!+1$.

Soluţie.

Notăm cu d numărul căutat. Deoarece d divide cele două numere, va divide şi diferenţa lor

$$(n+1)!+1-n!-1=(n+1)\cdot n!-n!=n\cdot n!.$$

De asemenea, va divide şi pe $n(n!+1)=n!n+n$ şi în consecinţă pe n, deci şi pe $n!$. Deoarece d divide pe $n!+1$ şi pe $n!$, d va divide şi diferenţa lor $n!+1-n!=1$, de unde rezultă că $d=1$, şi cele două numere sunt prime.

4. Să se determine numerele prime p astfel încât numărul p^2+11 să aibă exact 6 divizori.

Soluţie.

Fie p număr prim, $p \geq 5$. Atunci el va fi de forma $p = 4n \pm 1$ (altfel ar fi număr par) şi $p^2 + 11 = 4(4n^2 \pm 2n + 3)$, deci va fi multiplu de 4. Dar p fiind prim nu este multiplu de 3; el va fi de forma $p = 3m \pm 1$. Rezultă că $p^2 + 11 = 3(3m^2 \pm 2m + 4)$, deci este şi multiplu de 3. Aşadar, orice număr de forma dată cu $p \geq 5$ va avea ca divizori cel puţin numerele $1, 2, 3, 4, 6, 12$ şi pe el însuşi, deci mai mult de 6 divizori.

Rămân de verificat numerele prime mai mici decât 5. Pentru $p = 2$, $p^2+11 = 15$, şi are 4 divizori; pentru $p = 3$, $p^2 + 11 = 20$, şi are exact 6 divizori $1, 2, 4, 5, 10, 20$. Aşadar, singurul număr prim cu proprietatea cerută este $p = 3$.

5. Numărul 27000001 are exact 4 factori primi. Determinaţi suma lor.

Soluţie.

Descompunem în factori

$$27000001 = \\
300^3 + 1 = (300 + 1)(300^2 - 300 + 1) = 7 \cdot 43(300^2 + 2 \cdot 300 + 1 - 3 \cdot 300) = \\
7 \cdot 43(301^2 - 30^2) = 7 \cdot 43(301 - 30)(301 + 30).$$

Suma celor 4 factori primi este $7 + 43 + 602 = 652$.

6. Fie m, n două numere naturale pentru care suma dintre cel mai mic multiplu comun (notat $[m, n]$) şi cel mai mare divizor comun (notat (m, n)) este egală cu suma numerelor date. Demonstraţi că unul din numere îl divide pe celălalt.

Soluţie.

Fie $M = [m, n]$ şi $D = (m, n)$. Relaţia dată se scrie $M + D = m + n$. Se ştie că $MD = mn$ şi înlocuim $M = mn/D$ în relaţia dată, care devine $D^22 - (m + n)D + mn = 0$. Ecuaţia în D are soluţiile $D_{1,2} = m, n$. Dacă $D = m$, atunci m divide pe n, iar dacă $D = n$, rezultă că n divide pe m.

7. Să se demonstreze că orice număr natural n poate fi reprezentat într-o infinitate de moduri în forma

$$n = \pm 1^2 \pm 2^2 \pm \cdots \pm k^2,$$

unde numărul k şi semnele -, + sunt convenabil alese.

Soluţie.

Alegând secvenţa de semne $+, -, -, +$ obţinem, pentru orice m, $m^2 - (m + 1)^2 - (m + 2)^2 + (m + 3)^2 = 4$. Aşadar, dacă există o astfel de reprezentare pentru $n = 1, 2, 3, 4$, va exista pentru orice n, căci putem adăuga secvenţele corespunzătoare.

Pentru $n = 1$, avem $k = 1$, semnul $+$.

Pentru $n = 2$, avem $k = 4$, semnele $-, -, -, +$.

Pentru $n = 3$, avem $k = 2$, semnele $-, +$.

Pentru $n = 4$, avem $k = 4$, semnele $+, -, -, +$.

Am demonstrat că pentru orice n există o astfel de reprezentare. Din această reprezentare putem să obţinem o infinitate de reprezentări, adăugând succesiv secvenţe de lungime 8 cu semnele $+, -, -, +, -, +, +, -$, care au suma 0 şi nu modifică valoarea lui n.

8. Să se determine ultima cifră a numărului $3^{1001} \cdot 7^{1002} \cdot 13^{1003}$.

Soluţie.

Numerele 3 şi 13 se termină cu aceeaşi cifră, deci ultima cifră a numărului dat este aceeaşi cu a numărului

$$3^{2004} \cdot 7^{1002} = 3^{1002} \cdot 21^{1002} =$$
$$3^2 \cdot \left(3^4\right)^{250} \cdot 21^{1002} = 9 \cdot 81^{250} \cdot 21^{1002}.$$

Rezultă că ultima cifră a numărului dat este 9.

9. Ştiind că 2^{29} este un număr de 9 cifre distincte două câte două, să se determine, fără a calcula numărul, care din cifrele de la 0 la 9 lipseşte din scrierea lui 2^{29}.

Soluţie.

Deoarece numărul are 9 cifre, se va scrie sub forma

$$a_8 10^8 + a_7 10^7 + ... + a_1 10 + a_0 =$$
$$a_8(9+1)^8 + a_7(9+1)^7 + ... + a_1(9+1) + a_0 =$$
$$9k + a_8 + a_7 + ... + a_1 + a_0,$$

unde k este un număr natural. Fie r cifra care lipseşte. Deoarece suma cifrelor de la 0 la 9 este 45, suma $a_8 + a_7 + ... + a_1 + a_0$ va fi $45 - r$, şi numărul va fi de forma $9k + 45 - r = 9k + 36 + 9 - r = 9q + (9 - r)$, unde $q = k + 4$. Rezultă că $9 - r$ este restul împărţirii numărului 2^{29} la 9.

Dar $2^{29} = (2^6)^4 \cdot 2^5$. Restul la împărţirea cu 9 a numărului $2^6 = 64$ este 1, iar restul la împărţirea cu 9 a numărului $2^5 = 32$ este 5. Aşadar restul împărţirii numărului 2^{29} cu 9 va fi 5. Egalând cu $9 - r$, obţinem $r = 4$, aceasta fiind cifra care lipseşte din scrierea numărului.

În 7 noiembrie 2016 a avut loc la Universitatea *Babeş-Bolyai* din Cluj-Napoca Dezbaterea Regională privind „Analfabetismul funcţional în România“, evenimentul fiind organizat în cadrul proiectului *România Educată* ([2]), derulat de către Departamentul de Educaţie şi Cercetare al Administraţiei Prezidenţiale. În cadrul dezbaterii a fost prezentat un studiu al Centrului de Evaluare şi Analize Educaţionale din Bucureşti, în care s-a constatat că 42% dintre elevii români de 15 ani sunt anafabeţi funcţional. Acest lucru înseamnă că acei elevi, cu toate că ştiu să scrie, să citească sau să efectueze calcule, nu pot să contextualizeze informaţii sau să înţeleagă noţiunile învăţate. Media la nivelul ţărilor UE este acum de 20%, iar ţinta este ca analfabetismul funcţional să scadă la 15% în 2021, după cum se arată în studiul respectiv.

De aceea, pe lângă problemele abstracte, este foarte util să propunem elevilor probleme cu enunţ inspirat din lumea reală. Acestea le atrag interesul, le dezvoltă raţionamentul şi le dau încredere în forţele lor.

10. Elevii au calculat media vârstelor celor 30 de profesori din şcoală şi au obţinut 38. La verificare, au observat că o vârstă a fost greşit trecută ca 26 în loc de 56. Calculaţi rapid media corectă.

Soluţie.

Notăm S_{ca} suma calculată cu datele incorecte, şi S_c suma corectă. Avem $S_{ca} = 38 \cdot 30 = 1140$.

Rezultă că suma corectă a vârstelor profesorilor este $S_c = S_{ca} - 26 + 56 = 1170$.

Media corectă va fi egală cu $S_c/30 = 39$.

11. Media înălţimilor a şase copii este 152 cm. Dacă înălţimile a cinci dintre ei sunt 151 cm, 153 cm, 155 cm, 149 cm şi 154 cm, să se găsească înălţimea celui de-al şaselea.

Soluţie.

Suma înălţimilor copiilor este $152 \cdot 6 = 912$. Suma înălţimilor cunoscute este $151 + 153 + 155 + 149 + 154 = 762$. Rămâne că înălţimea celui de-al şaselea copil este $912 - 762 = 150$, evident exprimată în centimetri.

12. La o fabrică de ciocolată s-au produs 4250 batoane de trei tipuri: cu alune, cu lapte şi cu cocos. Batoanele cu lapte sunt cu 715 mai putine decât cele cu cocos, iar batoanele cu alune sunt de cinci ori mai multe decât cele cu lapte. Câte batoane s-au produs din fiecare fel?

Soluţie.

Notăm cu n numărul batoanelor cu lapte (care apar în legătură cu fiecare sortiment de alte batoane). Avem:

- batoane cu cocos $n + 715$;
- batoane cu alune $5n$.

Rezultă că în total sunt: $5n + n + (n + 715) = 4250$ batoane, de unde $7n = 3535$ şi $n = 505$. Numărul batoanelor cu lapte este de 505, al celor cu alune $5 \cdot 505 = 2525$, iar al celor cu cocos $505 + 715 = 1220$.

3. DOUĂ PROBLEME DATE LA TESTELE PISA

Raportul internaţional publicat în 2016 de OECD ([3]), Excellence and Equity in Education (vol. I), include informaţii referitoare la performanţele sistemului educaţional românesc în cadrul Programului OECD-PISA 2015.

În România, Programul OECD-PISA 2015 s-a desfăşurat prin intermediul Centrului Naţional de Examinare şi Evaluare (CNEE). Testarea propriu-zisă a avut loc în data de 22 aprilie 2015, fiind validate testele susţinute de 4876 elevi de 15 ani din 182 de şcoli respondente, eşantionate de consorţiul OECD. România a administrat instrumentele de evaluare în format tipărit: fiecare elev participant a primit o broşură de test cu durata de lucru de două ore, conţinând o combinaţie de itemi de investigare a competenţelor de Ştiinţe, de Matematică şi de Citire/Lectură.

Au fost împărţite 30 de tipuri de broşuri de test conţinând combinaţii de sarcini de lucru/itemi din cele trei domenii. Elevii au completat şi un chestionar de mediu socio-educaţional, cu durata de răspuns de $35 - 45$ de minute. De asemenea, directorii unităţilor de învăţământ participante au completat un chestionar de investigare a caracteristicilor culturale ale şcolii din perspectiva mediului şcolar, a ofertei educaţionale, a oportunităţilor de învăţare etc.

La Matematică, România a înregistrat scorul mediu de 444 puncte (faţă de 445 puncte în 2012), similar cu ţări precum Grecia, Bulgaria, Cipru sau Argentina, dar sub media ţărilor OECD.

În cele ce urmează, prezentăm două probleme care au fost propuse la testarea din 2012. Toate problemele de la această testare se găsesc în [4].

URCÂND PE MUNTELE FUJI

Muntele Fuji este un faimos vulcan inactiv din Japonia.

Întrebarea 1: URCÂND PE MUNTELE FUJI

Muntele Fuji este deschis publicului pentru a fi urcat din 1 iulie până în 27 august în fiecare an. În acest interval, aproximativ 200000 de oameni urcă pe Muntele Fuji.

În medie, câţi oameni urcă pe Muntele Fiji în fiecare zi?

A. 340
B. 710
C. 3400
D. 7100
E. 7400

Soluţie.
De la 1 iulie până în 27 august sunt $31 + 27 = 58$ de zile, media pe zi fiind $200000 : 58 = 3448,27...$; aşadar, răspunsul corect este C.

Întrebarea 2: URCÂND PE MUNTELE FUJI

Poteca Gotemba până la vârful muntelui are o lungime de 9 kilometri (km).

Turiştii trebuie să se întoarcă din plimbarea de 18 km până la ora 8 seara.

Toshi estimează că poate să urce muntele cu o viteză medie de 1,5 kilometri pe oră, şi să coboare cu dublul acelei viteze. Aceste viteze ţin cont şi de pauzele de masă şi de odihnă.

Pe baza vitezelor estimate, la ce oră poate pleca Toshi cel mai târziu pentru a se putea întoarce la ora 8 seara?

Soluţie.
La urcare, Toshi va face $9 : 1,5 = 6$ ore, iar la coborâre $9 : 3 = 3$ ore, în total 9 ore. Pentru a putea să se întoarcă la 8 seara, va trebui să plece cel târziu la ora 11 dimineaţa.

Întrebarea 3: URCÂND PE MUNTELE FUJI

Toshi a purtat un pedometru pentru a număra paşii plimbării sale de-a luncul potecii Gotemba. Pedometrul a arătat că a făcut 22500 de paşi pe drumul de urcare.

Estimaţi lungimea medie a pasului lui Toshi la urcarea de 9 km pe poteca Gotemba. Daţi răspunsul în centimetri (cm).

Răspuns: .... cm.

Soluţie.
9 km = 9000 m = 900000 cm, şi rezultă că lungimea pasului lui Toshi este 900000 : 22500 = 40 cm.

ELENA BICICLISTA

Elena tocmai a primit o bicicletă nouă. Aceasta are un vitezometru pe ghidon.

Vitezometrul îi arată Elenei distanţa pe care o parcurge şi viteza medie pentru o călătorie.

Întrebarea 1: ELENA BICICLISTA

Într-o călătorie, Elena a mers 4 km în primele 10 minute şi apoi 2 km în următoarele 5 minute.

Care dintre următoarele afirmaţii este corectă?

A. Viteza medie a Elenei a fost mai mare în primele 10 minute decât în următoarele 5 minute.
B. Viteza medie a Elenei a fost aceeaşi în primele 10 minute şi în următoarele 5 minute.
C. Viteza medie a Elenei a fost mai mică în primele 10 minute decât în următoarele 5 minute.
D. Nu putem afirma nimic despre viteza medie a Elenei din informaţiile date.

Soluţie.
Viteza medie în primele 10 minute este 4 km:10 min $= 0,4$ km/min; în următoarele 5 minute, viteza medie este 2 km:5 min $= 0,4$ km/min. Răspunsul corect este B.

Întrebarea 2: ELENA BICICLISTA

Elena a mers cu bicicleta 6 km până la mătuşa sa. Vitezometrul a arătat că a avut o viteză medie de 18 km/h pentru întreaga călătorie.

Care dintre următoarele afirmaţii este corectă?

A. Elena a făcut 20 minute până la mătuşa sa.
B. Elena a făcut 30 minute până la mătuşa sa.
C. Elena a făcut 3 ore până la mătuşa sa.

D. Nu este posibil să spunem cât timp a făcut Elena până la mătuşa sa.

Soluţie.

Timpul în care Elena a ajuns la mătuşa sa este 6 km : 18 km/h = 1/3 h = 20 min. Răspunsul corect este A.

Întrebarea 3: ELENA BICICLISTA

Elena a mers cu bicicleta de acasă până la râu, care este la 4 km distanţă. A durat 9 minute. Ea s-a întors acasă pe un drum mai scurt, de 3 km. Aceasta i-a luat doar 6 minute.

Care a fost viteza medie a Elenei, în km/h, pentru călătoria până la râu şi înapoi?

Soluţie.

Spaţiul parcurs de Elena este 4 km + 3 km = 7 km, iar timpul 9 min + 6 min = 15 min = $0,25$ h. Viteza medie este 7 km : $0,25$ h = 28 km/h.

BIBLIOGRAFIE

[1] https://www.edu.ro/rezultatele-elevilor-rom%C3%A2ni-la-testarea-oecd-pisa-2015

[2] http://www.presidency.ro/files/userfiles/Agenda_dezbatere_Cluj_Napoca.pdf

[3] OECD (2016), PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education, OECD Publishing, Paris. DOI: http://dx.doi.org/10.1787/9789264266490-en

[4] https://www.oecd.org/pisa/test/PISA%202012%20items%20for%20release_-ENGLISH.pdf

Colegiul Naţional Mihai Eminescu
Str. 1 Decembrie 1918, Nr. 7, Petroşani
Judeţul Hunedoara
e-mail: ramonalucaci@yahoo.com

Primit la redacţie: October 5, 2016