DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 34(2016), pp. 15–20

TEOREMA LUI NAPOLEON. CERCUL CELOR NOUĂ PUNCTE ALE LUI EULER

Diana-Florina Haliţă

Abstract. Geometry offers us several beautiful problems with many synthetic demonstrations. In this paper I have proposed a proof with Complex Numbers for two well-known theorems: Napoleon's Theorem and for Euler's Nine-Point Circle. I have started from the idea that many problems from Geometry can be proved using Complex Numbers Theory.

MSC 2000. 97F50.
Key words. complex numbers, geometry, Napoleon's Theorem, Euler's Nine-Point Circle

1. ASUPRA TEOREMA LUI NAPOLEON

LEMA 1. *Fie $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$. Se dau triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$. Ştiind că cele două triunghiuri sunt la fel orientate putem spune că următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i) triunghiurile $A_1A_2A_3$ şi $B_1B_2B_3$ sunt asemenea în această ordine
ii) $\dfrac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\dfrac{b_2-b_1}{b_3-b_1}$
iii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0.$

Demonstraţie. Are loc echivalenţa dintre cele trei afirmaţii:
ii) $\Leftrightarrow$ i)

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}=\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}\Leftrightarrow\left|\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}\right|=\left|\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}\right| \text{ şi } arg\left(\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1}\right)=arg\left(\frac{b_2-b_1}{b_3-b_1}\right)$$
$$\Leftrightarrow\frac{|a_2-a_1|}{|a_3-a_1|}=\frac{|b_2-b_1|}{|b_3-b_1|} \text{ şi } m(\angle(A_3A_1A_2))=m(\angle(B_3B_1B_2))$$
$$\Leftrightarrow\frac{A_1A_2}{A_1A_3}=\frac{B_1B_2}{B_1B_3} \text{ şi } m(\angle(A_3A_1A_2))=m(\angle(B_3B_1B_2))$$
$$\Leftrightarrow\Delta A_1A_2A_3\sim\Delta B_1B_2B_3$$

iii) $\Leftrightarrow$ ii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ b_1 & b_2-b_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 \\ b_2-b_1 & b_3-b_1 \end{vmatrix}=0$$
$$\Leftrightarrow(a_2-a_1)\cdot(b_3-b_1)-(a_3-a_1)\cdot(b_2-b_1)=0$$

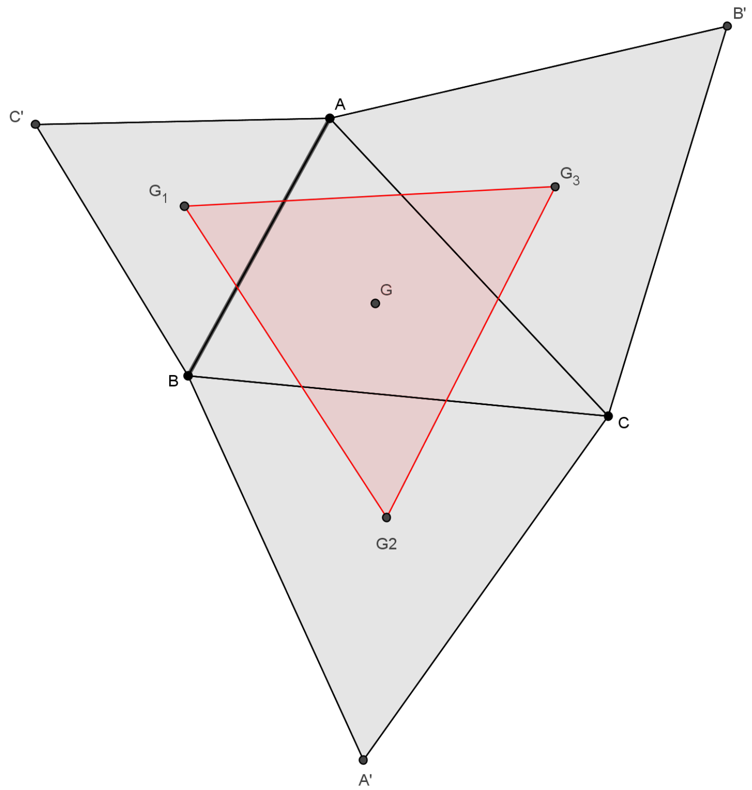
$\Leftrightarrow (a_2 - a_1) \cdot (b_3 - b_1) = (a_3 - a_1) \cdot (b_2 - b_1)$
$\Leftrightarrow \dfrac{a_2 - a_1}{b_2 - b_1} = \dfrac{a_3 - a_1}{b_3 - b_1}$. □

OBSERVAŢIA 1. *Fie $M_1(z_1), M_2(z_2), M_3(z_3)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
i)triunghiul $M_1M_2M_3$ este echilateral
ii)$z_1 \cdot \varepsilon + z_2 \cdot \varepsilon^2 + z_3 = 0$,
unde $\varepsilon = \cos(\frac{2\cdot\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\cdot\pi}{3})$ *sau* $\varepsilon = \cos(\frac{4\cdot\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\cdot\pi}{3})$.
iii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & z_2 & z_3 \\ z_2 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_2 & z_3 & z_1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_3 & z_1 & z_2 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$
iv)$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1$.
v)$\dfrac{z_2 - z_1}{z_3 - z_2} = \dfrac{z_3 - z_2}{z_1 - z_3}$.
vi)$\dfrac{1}{z - z_1} + \dfrac{1}{z - z_2} + \dfrac{1}{z - z_3} = 0$, *unde* $z = \dfrac{z_1 + z_2 + z_3}{3}$.

LEMA 2. *Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $BCA \Leftrightarrow$ triunghiul ABC este echilateral şi are loc $a + \varepsilon \cdot b + \varepsilon^2 \cdot c = 0$, unde ε este rădăcina complexă nereală, de ordinul 3 a unităţii.*

Demonstraţie. Fie $A(a), B(b), C(c)$. Conform lemei anterioare triunghiurile ABC şi BCA sunt asemenea $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
$\begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c-b & a-b \end{vmatrix} = 0$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c \Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-b)^2 = 0$
$\Leftrightarrow \begin{cases} (a + \varepsilon \cdot b + \varepsilon^2 \cdot c) \cdot (a + \varepsilon \cdot c + \varepsilon^2 \cdot b) = 0 \\ \text{triunghiul } ABC \text{ este echilateral} \end{cases}$
□

TEOREMA 1. *În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale pozitiv orientate $AC'B, BA'C, CB'A$. Demonstraţi că centrele de greutate ale acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.*



Demonstraţie. (enunţul problemei a fost preluat din [1], o altă demonstraţie cu numere complexe în [1] p.74)

Fie $A(a), B(b), C(c), A'(a'), B'(b'), C'(c')$ şi G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $AC'B, BA'C, CB'A$. Din observaţia anterioară şi din ipoteza teoremei, conform căreia triunghiurile $AC'B, BA'C, CB'A$ sunt echilaterale stim:

$a + c' \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2 = 0$
$b + a' \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon^2 = 0$
$c + b' \cdot \varepsilon + a \cdot \varepsilon^2 = 0$

Centrele de greutate ale triunghiurilor echilaterale $AC'B, BA'C, CB'A$ sunt: $G_1(a''), G_2(b''), G_3(c'')$ unde:

$a'' = \dfrac{1}{3} \cdot (a + b + c')$
$b'' = \dfrac{1}{3} \cdot (a' + b + c)$
$c'' = \dfrac{1}{3} \cdot (a + b' + c)$

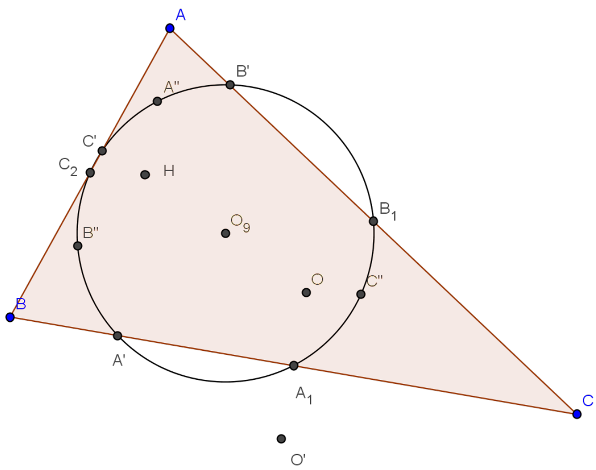
Rămâne să demonstrăm că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral, adică :
$c'' + \varepsilon \cdot a'' + \varepsilon^2 \cdot b'' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot ((a + b' + c) + (a + b + c') \cdot \varepsilon + (a' + b + c) \cdot \varepsilon^2)$
$= \frac{1}{3} \cdot ((a + c' \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2) + \varepsilon \cdot (b + a' \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \cdot (c + \varepsilon \cdot b' + \varepsilon^2 \cdot a)) = 0$
□

Observaţia 2. *Concluzia acestei teoreme rămâne valabilă chiar dacă triunghiurile echilaterale nu sunt construite în exteriorul triunghiului.*

2. CERCUL CELOR NOUĂ PUNCTE ALE LUI EULER

Teorema 2. *Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălţimilor , mijloacele segmentelor ce unesc vârfurile cu ortocentrul sunt nouă puncte situate pe un cerc, cu centrul în mijlocul segmentului care uneşte centrul cercului circumscris triunghiului dat cu ortocentrul şi cu raza egală cu jumătate din raza cercului circumscris, numit cercul lui Euler.*

Demonstraţie. (enunţul problemei a fost preluat din [1], o altă demonstraţie cu numere complexe în [1] p.106, iar una geometrică în [3] p. 15)



Fie triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris acestui triunghi, H ortocentrul şi A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Notez A'', B'', C'' mijloacele segmentelor AH, BH, CH, E mijlocul segmentului OH, şi A', B', C' picioarele inălţimilor triunghiului ABC, utilizand litere mici pentru a nota afixele punctelor considerate.

Fie O originea reperului ales şi $A(a), B(b), C(c) \Rightarrow a_1 = \dfrac{b+c}{2}$, $a'' = \dfrac{a+h}{2}$. Demonstrez că $h = a + b + c$:

Fie O_1 simetricul lui O în raport cu $BC \Rightarrow o_1 = 2 \cdot a_1 - 0 = b + c$.

Fie A''' punctul de pe cerc obţinut astfel încat $AB \perp BA'''$.

$BHCA'''$ paralelogram $\Rightarrow A_1$ este şi mijlocul lui HA'''

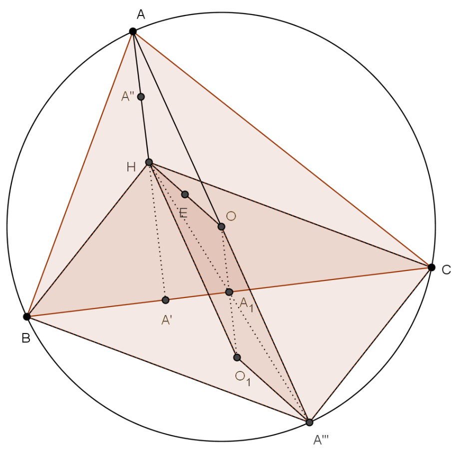
OHO_1A''' paralelogram(diagonalele se intersectează în mijloc) $\Rightarrow HO_1 \parallel AO$. Dar $AH \parallel OO_1 \Rightarrow AOO_1H$ paralelogram $\Rightarrow o+h = o_1+a \Rightarrow h = a+b+c$

Avem $|a| = |b| = |c| = R$. Deoarece $e = \dfrac{h}{2}$ avem: $e = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Se observă că E este şi mijlocul segmentului $A''A_1 \Rightarrow EA'' = EA_1$.

Patrulaterul $A'A_1OH$ fiind trapez dreptunghic avem $A'E = EA_1$. Deci A', A_1, A'' sunt pe cercul cu centrul în E şi de rază: $EA_1 = |a_1 - e| = |\dfrac{a}{2}| = \dfrac{R}{2}$.

Analog se demonstrează că şi punctele $B_1, B', B'', C_1, C', C''$ sunt pe centrul de centru E si rază $\frac{R}{2}$.



□

BIBLIOGRAFIE

[1] T. Andreescu, D. Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhauser, Boston, 2001
[2] D. Andrica, N. Bişboacă: *Numere Complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative*, Millenium, Cluj-Napoca, 2000
[3] V. Boskoff, L. Nicolescu: *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnica, 1990
[4] Liang-shin Hahn: *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994
[5] N. Mihăileanu: *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*, Editua Tehnică, Bucureşti, 1968
[6] G.S. Sălăgean: *Geometria Planului Complex*, Promedia-Plus, Cluj-Napoca, 1997

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: diana.halita@ubbcluj.ro

Primit la redacţie: 11 Iunie 2015