DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 34(2016), pp. 9–14

LANŢUL STEINER – O PREZENTARE ÎN PLANUL COMPLEX

Valeriu Anisiu

Abstract. We give a necessary and sufficient condition for the existence of a closed Steiner chain, using complex numbers and homographic functions. We present an animation programmed in the Computer Algebra System Maple.

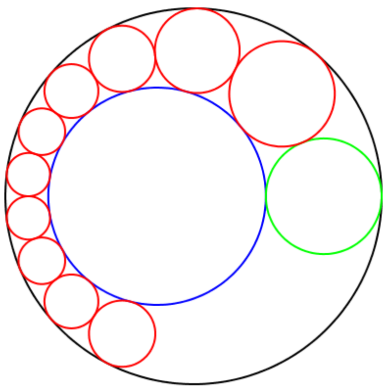
MSC 2000. 51-01, 30-01, 30C20

Key words. Steiner chain, conformal automorphism, Möbius transformation

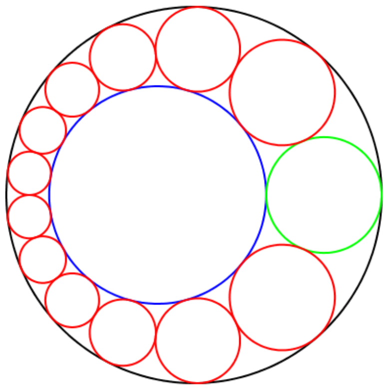
1. INTRODUCERE

Problema a fost formulată de geometrul elveţian Jakob Steiner (18 martie 1796 – 1 aprilie 1863), o prezentare a acesteia putând fi găsită în [3].

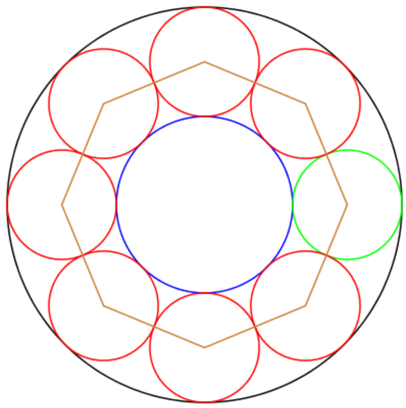
Fiind dat un cerc C_1 interior cercului C_2, se pune problema construcţiei unui lanţ de cercuri tangente exterior între ele, care sunt în acelaşi timp tangente exterior cercului C_1 şi interior cercului C_2, pe care îl vom numi în continuare *lanţ Steiner*.



În plus, se doreşte stabilirea condiţiilor ca acest lanţ să se închidă, adică ultimul cerc introdus să fie tangent primului, ca în figura următoare:



Problema închiderii lanţului lui Steiner are o soluţie simplă în cazul în care cercurile C_1 şi C_2 sunt concentrice. În acest caz, centrele cercurilor tangente vor fi vârfurile unui poligon regulat înscris într-un cerc având raza egală cu media aritmetică a razelor cercurilor C_1 şi C_2. Evident că raportul razelor cercurilor C_1 şi C_2 va depinde de numărul laturilor poligonului.



O proprietate interesantă pentru această configuraţie este că primul dintre cercurile tangente (cel de culoare verde) poate fi plasat în orice poziţie (adică punctul său de tangenţă cu cercul interior C_1 poate fi ales arbitrar), fără ca închiderea lanţului să fie afectată. Acest fapt este evident în cazul cercurilor concentrice, nu însă şi în cazul general.

În [1] apare o schiţă a construcţiei utilizând inversiunea. Tot cu ajutorul inversiunii (într-o variantă mai exotică) este tratat lanţul lui Steiner în [2].

Vom aborda problema într-un mod nou, utilizând numerele complexe şi, în loc de inversiune, funcţiile omografice. Această metodă este mai directă şi are avantajul că se pretează uşor la programarea cu *Maple* a unei animaţii sugestive, care este prezentată în ultima parte a lucrării.

2. REZOLVAREA PROBLEMEI

Considerăm problema în planul complex. Cercul exterior C_2 va fi cercul unitate.

Următorul rezultat permite reducerea problemei generale la cazul în care cercurile date sunt concentrice.

TEOREMA 1. *Fie C un cerc conţinut în discul unitate U (deschis) din planul complex. Atunci există un automorfism conform $f \in A(U)$ al lui U astfel încât cercul $f(C)$ să aibă centrul în origine.*

Demonstraţie. Fie c centrul cercului C. Putem presupune $c \neq 0$, căci altfel se poate alege $f = id$ (aplicaţia identică).

Considerăm rotaţia $f_1(z) = |c|/c \cdot z$. Deoarece $f_1(c) = |c|$, cercul $C_1 = f_1(C)$ va avea centrul în punctul $|c|$, adică pe axa reală d.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$ pentru care segmentul $[a, b]$ este diametru al cercului C_1.Putem presupune $a+b \neq 0$, căci altfel C_1 ar avea deja centrul în origine şi deci $f = f_1$.

Va fi suficient să găsim $f_2 \in A(U)$ astfel încât $f_2(C_1)$ să aibă centrul în origine. Având în vedere că funcţiile din $A(U)$ sunt de forma $z \mapsto \lambda \frac{z-p}{1-\bar{p}z}$, cu $p \in U$, $|\lambda| = 1$ (vezi [5]) vom căuta f_2 de forma $f_2(z) = \frac{z-p}{1-pz}$, cu $p \in (-1, 1)$.

Pentru $p \in \mathbb{R}$ rezultă $f_2(d) = d$.

Notăm $C_2 = f_2(C_1)$. C_2 este un cerc deoarece f_2 este aplicaţie omografică. Este cunoscut faptul că o astfel de aplicaţie conservă ortogonalitatea cercurilor în sens extins (i.e., cercuri şi drepte). Cum $C_1 \perp d$, rezultă $f_2(C_1) \perp f_2(d)$, adică $C_2 \perp d$ şi deci centrul cercului C_2 se află pe axa reală d. Va fi deci suficient ca p să fie ales astfel încât $f_2(a) = -f_2(b)$.

Dar $f_2(a) = -f_2(b) \iff \frac{a-p}{1-pa} = -\frac{b-p}{1-pb} \iff \phi(p) = 0$, unde

$$\phi(p) = p^2 - 2\frac{1+ab}{a+b}p + 1.$$

Ecuaţia $\phi(p) = 0$ are însă o (unică) rădăcină în $(-1, 1)$, deoarece $\phi(1)$ $\phi(-1) = -\frac{4(1-a^2)(1-b^2)}{(a+b)^2} < 0$.

Cu p astfel ales, automorfismul căutat este $f = f_2 \circ f_1$. $\square$

OBSERVAŢIA 1. *Rădăcina $p \in (-1, 1)$ a ecuaţiei $\phi(p) = 0$ are expresia*

$$p = \frac{1}{a+b}\left(1 + ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}\right). \tag{1}$$

Teorema 1 este suficientă pentru realizarea construcţiei cercurilor lui Steiner. Enunţăm totuşi următorul corolar, care include şi expresia razei cercului concentric rezultat.

COROLARUL 1. *Fie C un cerc conţinut în discul unitate U din planul complex şi care are o pereche de puncte diametral opuse a, b situate pe axa reală. Dacă cercul C nu este concentric cu cercul unitate δU atunci există un unic automorfism conform $f \in A(U)$ al lui U astfel încât cercul $f(C)$ are centrul*

în origine, $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ *şi* $f(a) > 0$.
În plus, raza cercului $f(C)$ *este*

$$r = \frac{1 - ab - \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}{|a-b|}. \tag{2}$$

Demonstraţie. Dacă $f(z) = \lambda \frac{z-p}{1-\bar{p}z}$, $(p \in U,\ |\lambda| = 1)$ din condiţia $f([a,b]) \subseteq \mathbb{R}$ rezultă $p, \lambda \in \mathbb{R}$. Dacă în demonstraţia teoremei 1 considerăm $f_1(z) = z$, rezultă unicitatea lui p (care are valoarea (1)). De asemenea, $\lambda \in \{-1, 1\}$ este unic deoarece $f(a) = \lambda \frac{a-p}{1-pa} > 0$ implică $\lambda = \operatorname{sign}(\frac{a-p}{1-pa})$. (de remarcat că $p \neq a$, deoarece $\frac{a-p}{1-pa} = -\frac{b-p}{1-pb}$ şi $a \neq b$).

Avem deci $r = f(a) = \lambda \frac{a-p}{1-pa} = \left|\frac{a-p}{1-pa}\right|$, şi înlocuind p din (1) se obţine (2). □

Observaţia 2. *Se observă uşor că*

$$r = \frac{|a-b|}{1 - ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}.$$

Propoziţia 1. *Fie* C_1 *un cerc concentric cu cercul unitate* δU *având raza* $r < 1$, *şi* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.
Condiţia necesară şi suficientă pentru ca să existe n *cercuri tangente exterior între ele şi tangente cercurilor* C_1 *şi* δU *este*

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1-r}{1+r}, \tag{3}$$

sau echivalent

$$r = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2n}\right). \tag{4}$$

Demonstraţie. Centrele celor n cercuri sunt vârfurile unui poligon regulat. Razele acestor cercuri sunt egale cu $(1-r)/2$. Dacă notăm cu A şi B centrele a două cercuri mici consecutive şi cu T punctul lor de tangenţă, unghiul AOT are măsura π/n. Deoarece $TA = (1-r)/2$ şi $OA = 1 - (1-r)/2 = (1+r)/2$, din triunghiul dreptunghic OAT se obţine $\sin(\frac{\pi}{n}) = TA/OA = (1-r)/(1+r)$.

Pentru a doua formulă se foloseşte $(1 - \sin x)/(1 + \sin x) = (1 - \cos(\pi/2 - x))/(1 + \cos(\pi/2 - x)) = \tan^2(\pi/4 - x/2)$. □

Teorema următoare conţine condiţia necesară şi suficientă pentru existenţa, în cazul general, a unui lanţ Steiner închis.

Teorema 2. *Fie* C *un cerc de rază* $R < 1$ *conţinut în discul unitate* U *din planul complex şi având centrul la distanţa* $d \geq 0$ *de origine.*

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca să existe între cercurile C şi δU un lanţ Steiner închis este

$$\frac{1+R^2-d^2-\sqrt{\left(1-(d-R)^2\right)\left(1-(d+R)^2\right)}}{2R}=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2n}\right).$$

Demonstraţie. Considerăm corolarul 1 pentru $a=d-R,\ b=d+R$.

Sub acţiunea automorfismului f (care păstrează tangenţa cercurilor), problema este transferată la cazul cercurilor conciclice în care cercul interior are raza

$$r=\frac{1+R^2-d^2-\sqrt{\left(1-(d-R)^2\right)\left(1-(d+R)^2\right)}}{2R}.$$

Aplicând propoziţia 1 rezultă concluzia. □

3. ANIMAŢIE CU MAPLE

Utilizarea Teoremei 1 permite realizarea cu programul Maple a unei animaţii a lanţului Steiner care va evidenţia faptul că punctul de tangenţă al primului cerc la cercul fix interior este arbitrar.

```
Steiner:=proc(N,z0:=1/2)
local f,R,t,k;
f := (a,w) -> (w+a)/(1+conjugate(a)*w);
R := (1-sin(Pi/N))/(1+sin(Pi/N));
# R = raza cercului fix; cele mici au raza (1-R)/2
plots:-animate(
plots:-complexplot,
[[exp(I*t),f(z0,exp(I*t)*R),
 seq(f(z0, exp(I*ani)*((1+R)/2*exp(I*2*Pi*k/N)+(1-R)/2*exp(I*t))),
     k=0..N-1)
 ],t=0..2*Pi,x=-1..1,y=-1..1,
color=[black,blue,green,red$N],axes=none
],
ani=0..2*Pi, frames=60, paraminfo=false, title="Lanul Steiner");
end:

Steiner(13,-0.3);
```

Rezultatul este o animaţie a lanţului Steiner în foaia de calcul Maple (v. [4]). Aceasta poate fi salvată într-un fişier `.gif` şi vizualizată cu orice browser (în absenţa programului Maple).

BIBLIOGRAFIE

[1] Ogilvy, C. S., *Excursions in Geometry*, Dover, 1990.
[2] Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L., *Geometry Revisited*, AMS, 1967.
[3] `https://en.wikipedia.org/wiki/Steiner_chain`
[4] Anisiu V., *Calcul formal cu Maple*, Presa Universitară Clujeană, Cluj-Napoca, 2006.
[5] Hamburg P., Mocanu P., Negoescu N., *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: `anisiu@math.ubbcluj.ro`

Primit la redacţie: 10 Septembrie 2016