DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 33(2015), pp. 113–118

ASUPRA UNOR PROBLEME PROPUSE LA CONCURSURI INTERJUDEŢENE

Daniel Văcăreţu

Abstract. This paper will present the solutions of two problems which were proposed to "Grigore Moisil" and "Marian Ţarină" inter-counties Romanian mathematical competitions. In Romania, these competitions are considered amongst the most difficult ones, being a good opportunity for students to train themselves and to self-assess their potential in view of their participation in the final stage of the National Mathematics Olympiad. As an evidence for the last statement stays the fact that the problems proposed in these competitions are annually published in the Mathematics Review/ Gazeta Matematică. We also have to mention the fact that the students' results in these competitions are special criteria for their admission to the Faculty of Mathematics and Informatics of Babeş-Bolyai University from Cluj-Napoca.

MSC 2000. 51-01

Key words. Mathematical competitions, geometry of triangle

1

Fie ABC un triunghi ascuţitunghic oarecare şi O centrul cercului său circumscris. Se consideră dreptele B_aC_a, C_bA_b respectiv A_cB_c perpendiculare în O pe dreptele AO, BO respectiv CO, unde $A_b, A_c \in BC$, $B_c, B_a \in CA$ şi $C_a, C_b \in AB$. Notăm cu H_a, H_b respectiv H_c ortocentrele triunghiurilor AC_aB_a, BA_bC_b respectiv CB_cA_c. Să se demonstreze că segmentele H_aA, H_bB şi H_cC pot fi laturile unui triunghi.

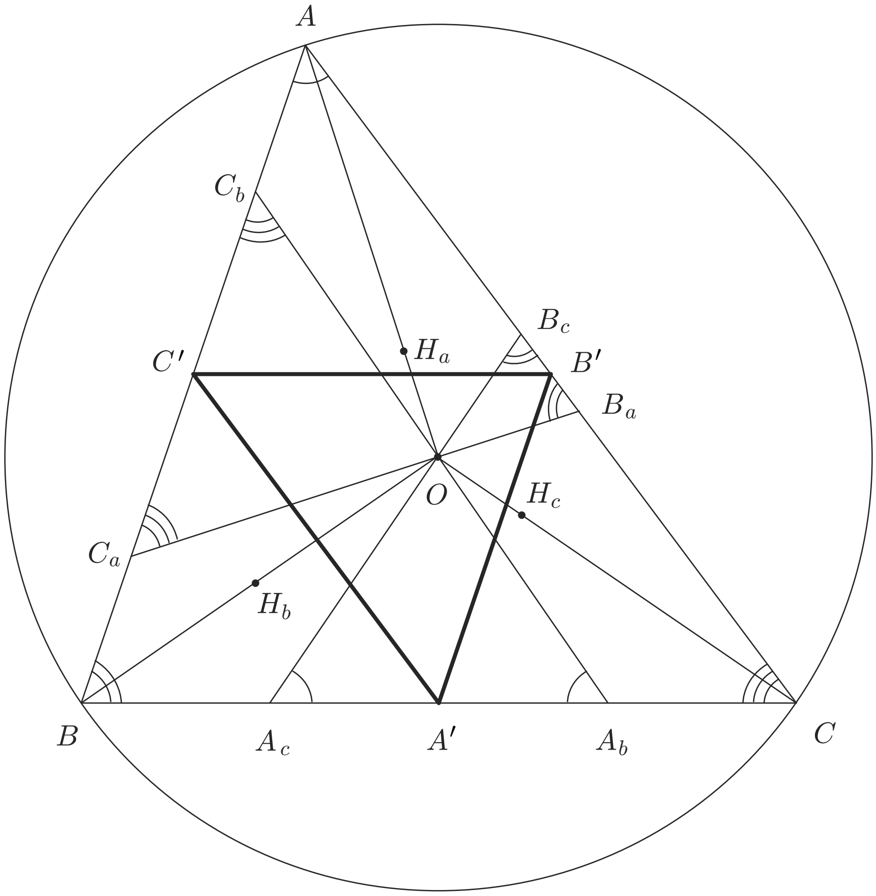
Daniel Văcăreţu
Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Grigore Moisil" ediţia a XXVI-a, 2011, Târgu Mureş

Soluţia 1. $m(\widehat{OAC}) = m(\widehat{OCA}) = 90^\circ - m(\widehat{B}) \Rightarrow m(\widehat{C_aB_aA}) = m(\widehat{B})$
Analog $m(\widehat{B_aC_aA}) = m(\widehat{C})$.
Deci B_aC_a este antiparalelă la BC.
Analog C_bA_b este antiparalelă la CA şi A_cB_c este antiparalelă la AB.
Ne interesează de fapt aici că triunghiurile AB_aC_a, A_bBC_b şi A_cB_cC sunt asemenea cu triunghiul ABC (au aceleaşi măsuri de unghiuri).
Avem:

$$\overrightarrow{OH}_a = \frac{\operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{OA} + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{OB}_a + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{OC}_a}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

$$\overrightarrow{OH}_b = \frac{\operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{OB} + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{OC}_b + \operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{OA}_b}{\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A}$$

$$\overrightarrow{OH}_c = \frac{\operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{OC} + \operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{OA}_c + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{OB}_c}{\operatorname{tg} C + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}.$$



Adunăm membru cu membru şi obţinem:

$$\overrightarrow{OA}_a + \overrightarrow{OH}_b + \overrightarrow{OH}_c = \frac{\operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{OA} + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{OB} + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{OC}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

$$+\frac{\operatorname{tg} A(\overrightarrow{OA}_b + \overrightarrow{OA}_c) + \operatorname{tg} B(\overrightarrow{OB}_a + \overrightarrow{OB}_c) + \operatorname{tg} C(\overrightarrow{OC}_a + \overrightarrow{OC}_b)}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}_a + \overrightarrow{OH}_b + \overrightarrow{OH}_c = \overrightarrow{OH} + 2 \cdot \frac{\operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{OA'} + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{OB'} + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{OC'}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

unde am notat cu H ortocentrul triunghiului ABC şi cu A', B', C' mijloacele segmentelor $[A_cA_b]$, $[B_aB_c]$ şi $[C_bC_a]$ care sunt de fapt şi mijloacele laturilor BC, CA, AB.

Dar triunghiul $A'B'C'$ este triunghiul median, deci are unghiurile de măsuri $m(\widehat{A})$, $m(\widehat{B})$, $m(\widehat{C})$. Deci

$$\frac{\operatorname{tg} A \cdot \overrightarrow{OA'} + \operatorname{tg} B \cdot \overrightarrow{OB'} + \operatorname{tg} C \cdot \overrightarrow{OC'}}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C} = \overrightarrow{0}$$

pentru că este vectorul $\overrightarrow{OH'}$, unde H' este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$ care coincide cu O.

Am obţinut deci:

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OH}_a + \overrightarrow{OH}_b + \overrightarrow{OH}_c$$

din relaţia lui Sylvester

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}_a + \overrightarrow{OH}_b + \overrightarrow{OH}_c$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{H_aA} + \overrightarrow{H_bB} + \overrightarrow{H_cC} = \overrightarrow{0}$$

adică segmentele H_aA, H_bB şi H_cC pot forma un triunghi.

Soluţia 2. $H_aA = 2R_a \cos A$, unde R_a este raza cercului circumscris triunghiului AC_aB_a care este asemenea cu triunghiul ABC (invers asemenea adică B_aC_a este antiparalelă la BC). Din asemănarea lor avem:

$$\frac{R_a}{R} = \frac{R}{h_a}$$

unde $R = OA$ este raza cercului circumscris triunghiului ABC şi înălţimea corespunzătoare lui A în triunghiul AC_aB_a, iar h_a este înălţimea din A a triunghiului ABC

$$\Rightarrow R_a = \frac{R^2}{h_a} \Rightarrow H_aA = \frac{2R^2}{h_a} \cos A$$

şi analog:

$$H_bB = \frac{2R^2}{h_b} \cos B,$$

$$H_cC = \frac{2R^2}{h_c} \cos C.$$

$$H_aA + H_bB > H_cC$$

$$\Leftrightarrow \frac{2R^2}{h_a} \cos A + \frac{2R^2}{h_b} \cos B > \frac{2R^2}{h_c} \cos C$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos A}{h_a} + \frac{\cos B}{h_b} > \frac{\cos C}{h_c}.$$

Dar $h_a = c \sin B$, $h_b = a \sin C$, $h_c = b \sin A$. Rezultă:

$$\frac{\cos A}{c \sin B} + \frac{\cos B}{a \sin C} > \frac{\cos C}{b \sin A}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos A}{2R \sin C \sin B} + \frac{\cos B}{2R \sin A \sin C} > \frac{\cos C}{2R \sin B \sin A}$$

$$\Leftrightarrow \sin A \cos A + \sin B \cos B > \sin C \cos C$$

$$\Leftrightarrow \sin 2A + \sin 2B > \sin 2C$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A+B)\cos(A-B) > 2\sin C\cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) > \cos C \Leftrightarrow \cos(A-B) - \cos C > 0$$

$$\Leftrightarrow -2\sin\frac{A-B+C}{2}\cdot\sin\frac{A-B-C}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)\sin\left(A-\frac{\pi}{2}\right) < 0 \Leftrightarrow \cos A\cdot\cos B > 0 \text{ adevărat.}$$

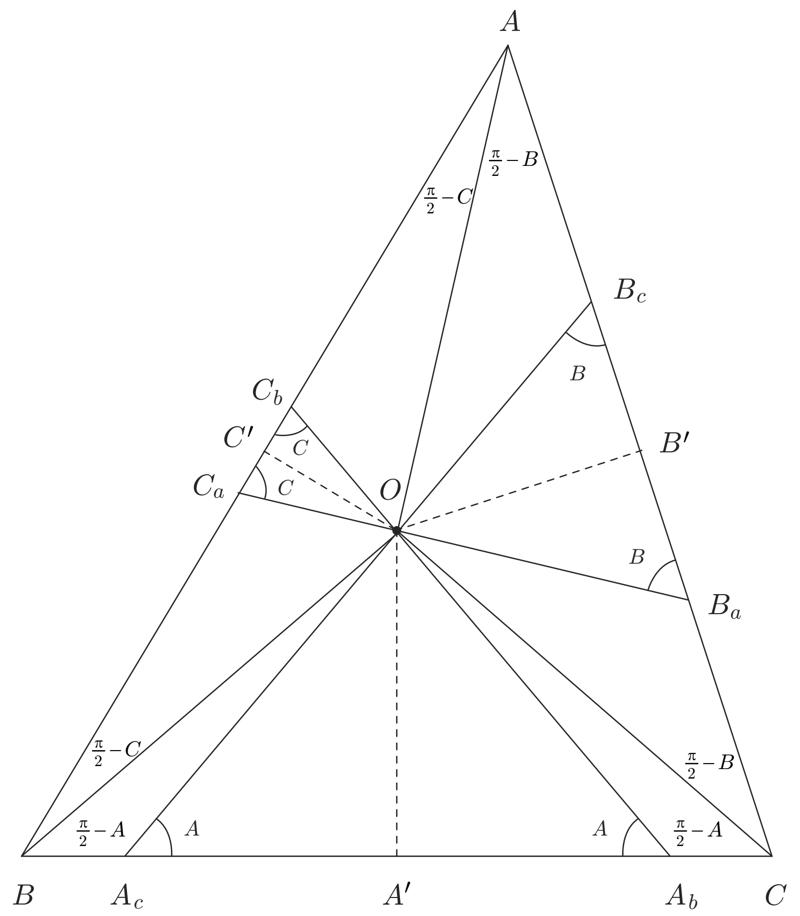
Analog se demonstrează $H_bB + H_cC > H_aA$ şi $H_aA + H_cC > H_bB$.

2

Fie O şi I centrul cercului circumscris respectiv centrul cercului înscris triunghiului oarecare ABC. Se consideră dreptele B_aC_a, C_bA_b respectiv A_cB_c perpendiculare în O pe dreptele AO, BO respectiv CO, unde $A_b, A_c \in BC$, $B_c, B_a \in CA$ şi $C_a, C_b \in AB$. Fie H_I şi O_I ortocentrul respectiv centrul cercului circumscris triunghiului $I_AI_BI_C$, unde I_A, I_B şi I_C sunt centrele cercurilor înscrise în triunghiurile AC_aB_a, BA_bC_b şi CB_cA_c şi I' centrul cercului înscris în triunghiul $A'B'C'$, unde A', B' şi C' sunt mijloacele laturilor BC, CA şi AB. Să se demonstreze că: $\overrightarrow{IH_I} = 2\cdot\overrightarrow{O_II'}$.

Daniel Văcăreţu
Concursul Interjudeţean de Matematică şi Informatică
"Marian Ţarină, ediţia a XII-a, 2012, Turda

Soluţie.



Vectorul de poziţie al centrului cercului înscris în triunghiul ABC este:

$$\overrightarrow{r}_I = \frac{a \cdot \overrightarrow{r}_A + b \cdot \overrightarrow{r}_B + c \cdot \overrightarrow{r}_C}{a+b+c} = \frac{\sin A \cdot \overrightarrow{r}_A + \sin B \cdot \overrightarrow{r}_B + \sin C \cdot \overrightarrow{r}_C}{\sin A + \sin B + \sin C}.$$

Avem:

$$m(\widehat{A_b}) = m(\widehat{A_c}) = m(\widehat{A}),$$
$$m(\widehat{B_a}) = m(\widehat{B_c}) = m(\widehat{B}),$$
$$m(\widehat{C_a}) = m(\widehat{C_b}) = m(\widehat{C}),$$

deci în cazul triunghiurilor AC_aB_a, BA_bC_b şi CA_cB_c avem:

$$\overrightarrow{O_II_A} = \frac{\sin A \cdot \overrightarrow{O_IA} + \sin B \cdot \overrightarrow{O_IB_a} + \sin C \cdot \overrightarrow{O_IC_a}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\overrightarrow{O_II_B} = \frac{\sin B \cdot \overrightarrow{O_IB} + \sin C \cdot \overrightarrow{O_IC_b} + \sin A \cdot \overrightarrow{O_IA_b}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$\overrightarrow{O_II_C} = \frac{\sin C \cdot \overrightarrow{O_IC} + \sin A \cdot \overrightarrow{O_IA_c} + \sin B \cdot \overrightarrow{O_IB_c}}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

(Am luat ca origine a vectorilor punctul O_I.)

Adunăm membru cu membru şi avem din relaţia lui Sylvester:

$$\overrightarrow{O_IH_I} = \overrightarrow{O_II_A} + \overrightarrow{O_II_B} + \overrightarrow{O_II_C}$$

$$= \overrightarrow{O_II} + \frac{\sin A(\overrightarrow{O_IA_c} + \overrightarrow{O_IA_b}) + \sin B(\overrightarrow{O_IB_a} + \overrightarrow{O_IB_c}) + \sin C(\overrightarrow{O_IC_b} + \overrightarrow{O_IC_a})}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

$$= \overrightarrow{O_II} + 2 \cdot \frac{\sin A \cdot \overrightarrow{O_IA'} + \sin B \cdot \overrightarrow{O_IB'} + \sin C \cdot \overrightarrow{O_IC'}}{\sin A + \sin B + \sin C} = \overrightarrow{O_II} + 2 \cdot \overrightarrow{O_II'}$$

(pentru că $m(\widehat{A'}) = m(\widehat{A})$, $m(\widehat{B'}) = m(\widehat{B})$, $m(\widehat{C'}) = m(\widehat{C})$ şi A', B', C' sunt mijloacele segmentelor A_cA_b, B_aB_c şi C_bC_a

$$\Rightarrow \overrightarrow{O_IH_I} - \overrightarrow{O_II} = 2 \cdot \overrightarrow{O_II'} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH_I} = 2 \cdot \overrightarrow{O_II'}.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Concursul de Matematică şi Informatică "Grigore Moisil", Ediţia a XXVI-a, Tg. Mureş, 1-3, aprilie 2011, prezentare de Eugenia Duca şi Dorel I. Duca, Gazeta Matematică seria B, nr.5/2011, pag. 248-251.

[2] Concursul interjudeţean de Matematică şi Informatică "Marian Ţarină", Ediţia a XII-a, Turda, 11-12 mai 2012, prezentare de Dorel I. Duca şi Gheorghe Lobonţ, Gazeta Matematică seria B, nr. 11/2012, pag. 512-522.

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: dvacaretu@yahoo.com

Primit la redacţie: 2 Noiembrie 2015