DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 33(2015), pp. 91–100

JOCURI NON-COOPERATIVE ÎN TERMENII FUNCTIILOR MULTIVOCE

Andra-Gabriela Silaghi

Abstract. Pompeiu-Hausdorff introduced a generalization of gap functional. The purpose of this paper is to generalize a theorem of existence of maximal elements in complete metric spaces for Hausdorff-continuous multivalued functions.

MSC 2000. 91A10.
Key words. Diameter, Generalized diameter, gap functional, Pompeiu-Hausdorff functional, Maximal elements, Metric spaces.

1. INTRODUCERE

DEFINIŢIA 1.1. *Prin spaţiu metric se înţelege orice mulţime X pe care este definită o funcţie* $d : X \times X \longrightarrow [0, +\infty)$ *ce satisface proprietăţile:*
i.) $d(x, y) = 0$ *dacă şi numai dacă x=y;*
ii.) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall x, y \in X$*;*
iii.) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$

DEFINIŢIA 1.2. *Orice funcţie d cu proprietăţile de mai sus se numeşte funcţie distanţă.*

DEFINIŢIA 1.3. *Fie un spaţiu metric (X,d) şi funcţionala diametru definită astfel:*

$$diam : P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup\{\ +\infty\},\ diam(Y) = \begin{cases} sup\{d(a,b) \mid \ a \in Y, b \in Y\}, & dacaY \neq \emptyset \\ 0, \quad daca\ Y = \emptyset \end{cases}$$

DEFINIŢIA 1.4. *Fie un spaţiu metric (X,d),* $A, B \subseteq X$ *şi funcţionala diametru generalizat definită astfel:*
$\delta : P(X) \times P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup\{\ +\infty\}$, $\delta(Y) = sup\{d(a, b) \mid \ a \in A, b \in B\}$

Observaţie: Vom defini în continuare funcţionalele: decalaj, exces şi Pompeiu-Hausdorff:
i.) Funcţionala $D : P(X) \times P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup\{+\infty\}$ se numeşte funcţionala decalaj a mulţimii A peste B şi este definită prin:

$$D(A, B) = \begin{cases} inf\{d(a, b) \mid \ a \in A, b \in B\}, & daca \ \ A \neq \emptyset \neq B \\ 0, \quad daca \ \ A = \emptyset = B \\ +\infty, \quad daca \ \ A = \emptyset \neq B \ \ sau \ \ A \neq \emptyset = B \end{cases}$$

ii.) Funcţionala $\rho : P(X) \times P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup\{+\infty\}$ se numeşte funcţionala exces a mulţimii A peste B şi este definită prin:

$$\rho(A,B) = \begin{cases} sup\{D(a,B) \mid \ a \in A\}, & daca \ \ A \neq \emptyset \neq B \\ 0, \ \ daca \ \ A = \emptyset = B \\ +\infty, \ \ daca \ \ A = \emptyset \neq B \ \ sau \ \ A \neq \emptyset = B \end{cases}$$

iii.) Funcţionala $H : P(X) \times P(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup\{+\infty\}$ se numeşte funcţionala Pompeiu-Hausdorff generalizată a mulţimii A peste B şi este definită prin:

$$H(A,B) = \begin{cases} max\{\rho(A,B), \rho(B,A)\}, & daca \ \ A \neq \emptyset \neq B \\ 0, \ \ daca \ \ A = \emptyset = B \\ +\infty, \ \ daca \ \ A = \emptyset \neq B \ \ sau \ \ A \neq \emptyset = B \end{cases}$$

Lema 1.1. *D(b,A)=0 dacă şi numai dacă* $b \in \overline{A}$.

Teorema 1.1. *Fie (X,d) spaţiu metric, perechea* $(P_{b,cl}(X), H)$ *este un spaţiu metric.*

Definiţia 1.5. *H este numită metrica Pompeiu-Hausdorff indusă de metrica d. Este notat cu* H_d *funcţionala Pompeiu-Hausdorff generată de metrica d pe spaţiul X.*

Observaţie: H este metrica generalizată pe $P_{cl}(X)$ (distanţa din definiţia metricii este un număr real).

Lema 1.2. *Fie (X,d) spaţiu metric. Atunci avem că:*
i.) $D(\bullet, Y) : (X,d) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $x \longrightarrow D(x,Y)$, $Y \in P(X)$, *este neexpansiv.*
ii.) $D(x, \bullet) : (P_{cl}(X), H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$, $y \longrightarrow D(x,Y)$, $x \in X$, *este neexpansiv.*

Demonstraţie. i.) Pentru a demonstra că $D(\bullet, Y) : (X,d) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este neexpansiv avem de demonstrat inegalitatea:
$|D(x_1,Y) - D(x_2,Y)| \leq d(x_1,x_2), \forall x_1, x_2 \in X$

Fie $x_1, x_2 \in X$ aleşi arbitrar, astfel pentru $\forall y \in Y$ avem că:
$d(x_1,y) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y)$

Aplicând $\inf\limits_{y \in Y}$ obţinem că:
$\inf\limits_{y \in Y} d(x_1,y) \leq d(x_1,x_2) + \inf\limits_{y \in Y} d(x_2,y) \Longrightarrow D(x_1,Y) \leq d(x_1,x_2) + D(x_2,Y) \Longrightarrow D(x_1,Y) - D(x_2,Y) \leq d(x_1,d_2)$, astfel rezultă ca $|D(x_1,Y) - D(x_2,Y)| \leq d(x_1,x_2), \forall x_1,x_2 \in X$.

Interschimbând rolurile lui $x_1 \in X$ şi $x_2 \in X$ obţinem că $|D(x_2,Y) - D(x_1,Y)| \leq d(x_2,x_1), \forall x_1,x_2 \in X$

ii.) Pentru a demonstra că $D(x, \bullet) : (P_{cl}(X), H) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este neexpansiv avem de demonstrat inegalitatea:
$|D(x,A) - D(x,B)| \leq H(A,B), \forall A,B \in P_{cl}(X)$

Fie $A, B \in P_{cl}(X)$ alese arbitrar, $a \in A$, $b \in B$, astfel avem că:
$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a)$

Aplicând $\inf\limits_{a \in A}$ obţinem că:
$D(x,A) \leq d(x,b) + D(b,A) \leq d(x,b) + H(B,A)$, astfel obţinem că $D(x,A) - D(x,B) \leq H(A,B)$ ■ □

LEMA 1.3. *Fie (X,d) spaţiu metric. Atunci funcţionala generalizată diam* : $(P_{cl}, H) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ *este continuă, funcţia definită astfel:*

$$diam(Y) = \begin{cases} sup\{d(a,b) \mid \ a \in Y, b \in Y\}, & daca \ \ Y \neq \emptyset \\ 0, \ \ daca \ \ Y = \emptyset \end{cases}$$

LEMA 1.4. *a.) Fie (X,d) spaţiu metric şi $Y, Z \in P(X)$. Atunci avem că $D(Y,Z) = \inf\limits_{x \in X} D(x,Y) + D(x,Z)$;*
b.) Fie (X,d) un spaţiu metric şi $(A_i)_{i \in I}$, B submulţimi nevide ale lui X. Atunci avem că: $D(\bigcup\limits_{i \in I} A_i, B) = \inf\limits_{i \in I} D(A_i, B)$;
c.) Fie (X,d) un spaţiu normat şi $A, B, C \in P(X)$. Dacă A este o mulţime convexă, atunci avem că:
$D(\lambda B + (1-\lambda)C, A) \leq \lambda D(B,A) + (1-\lambda) D(C,A)$, $\forall \lambda \in [0,1]$.

LEMA 1.5. *Fie (X,d) spaţiu metric, atunci avem că:*
i.) Dacă $Y, Z \in P(X)$ atunci $\delta(Y,Z) = 0$ dacă şi numai dacă $Y = Z = x_0$
ii.) $\delta(Y,Z) \leq \delta(Y,W) + \delta(W,Z)$, $\forall Y, Z, W \in P_b(X)$
iii.) Fie $Y \in P_b(X)$ si $q \in (0,1)$. Atunci, pentru fiecare $x \in X$ există $y \in Y$ astfel ca $q\delta(x,Y) \leq d(x,y)$.

În continuare, vor fi definite concepte şi rezultate de bază pentru operatorii multivoci.

Fie X si Y două mulţimi nevide. O funcţie multivocă (sau multifuncţie) de la X la Y este corespondenţa care asociază fiecărui element $x \in X$ o submulţime $F(x)$ a lui Y, altfel spus $F : X \longrightarrow P(Y)$.

Funcţiile multivoce apar în diferite domenii ale matematicii, vom da, astfel, trei exemple de astfel de operatori:

1.) Multifuncţia proiecţie metrică:
Fie (X,d) spaţiu metric şi $Y \in P(X)$, spunem că proiecţia metricii pe Y este funcţia multivocă $P_Y : X \longrightarrow P(Y)$ cu:

$P_Y(X) = \{y \in Y \mid \ D(x,Y) = d(x,y)\}$

Dacă X este un spaţiu Hilbert, iar Y este o mulţime închisă şi convexă, atunci P_Y devine operator univoc.

2.) Teoria controlului: Dacă f este definită astfel: $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ si ea determină dinamica unui sistem având următoarele ecuaţii de mişcare:
$x^{'}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x^0$

Ştim ca u este operatorul control şi poate fi ales din $U : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow P(\mathbb{R}^m)$ numită funcţia reacţie, aceasta fiind o problemă de teoria controlului.

3.) Fractali multivoci: Fie (X,d) un spaţiu metric şi $F_1, ..., F_m : X \longrightarrow P_{cl}(X)$ funcţii multivoce, fiecare fiind semicontinuu superior. Sistemul format din $F = (F_1, ..., F_m)$ se numeşte sistem de funcţii multivoce iterate (notat cu IMS).

Următoarea funcţie multivocă se numeşte Barnsley-Hutchinson generată de IMS F:

$$\tilde{F} : X \longrightarrow P_{cl}(X),\ \tilde{F}(x) = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} F_i(x)},\ \forall x \in X.$$

Dacă $F_i : X \longrightarrow P_{b,cl}(X)$, pentru $i = \overline{1,m}$, atunci avem că: $\tilde{F} : X \longrightarrow P_{b,cl}(X)$.

Următorul operator numit operatorul multi-fractal extins generat de IMS F este definit astfel:

$$\tilde{T_F} : P_{cl}(X) \longrightarrow P_{cl}(X),\ \tilde{T_F} = \overline{\bigcup_{i=1}^{m} F_i(Y)}$$

Un punct fix al $\tilde{T_F}$ este numit fractal întins multivoc.

Definiţia 1.6. *Fie X, Y doua spaţii nevide, pentru funcţia multivocă $F : X \longrightarrow P(Y)$ definim următoarele:*
i.) Domeniul efectiv: Dom F=$\{x \in X \mid\ F(x) \neq \emptyset\}$
ii.) Graficul: Graf F=$\{(x, y) \in X \times Y \mid\ y \in F(x)\}$
iii.) Rangul: F(X)=$\{\bigcup_{x \in X} F(x)\}$
iv.) Imaginea mulţimii $A \in P(X)$: $F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$
v.) Inversa imaginii mulţimii $B \in P(Y)$: $F^{-}(B) = \{x \in X \mid\ F(x) \bigcap B \neq \emptyset\}$
vi.) Inversa strictă a imaginii mulţimii $B \in P(Y)$: $F^{+} = \{x \in Dom\ F \mid F(x) \subset B\}$
vii.) Inversa funcţiei multivoce $F^{-1} : Y \longrightarrow P(X)$, $F^{-1}(Y) = \{x \in X \mid\ y \in F(x)\}$. Mulţimea $F^{-1}(y)$ este numita fibra lui F in punctul y.

Definiţia 1.7. *Fie X,Y,Z mulţimi nevide şi $F : X \longrightarrow Y$, $G : Y \longrightarrow Z$ funcţii multivoce. Compunerea celor două funcţii multivoce este tot o funcţie multivocă, acesta este definit astfel:*

$$H : X \longrightarrow Z,\ H = G \circ F,\ H(x) = \bigcup_{y \in F(x)} G(y)$$

Definiţia 1.8. *Fie (X,d), $(Y, d^{'})$ spaţii metrice şi $F : X \longrightarrow P(Y)$. Atunci F se numeşte:*
i.) a-Lipschitz dacă $a \geq 0$ si $H(F(x_1), F(x_2)) \leq ad(x_1, x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$;
ii.) a-Contracţie dacă este a-Lipschitz cu $a < 1$;
iii.) contractiv dacă $H(F(x_1), F(x_2)) < d(x_1, x_2)$. $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$

Observaţie: Fie (X,d) spaţiu metric si Y spaţiu Banach, atunci funcţia multivocă $F : X \longrightarrow P(Y)$ este α-Lipschitz pe mulţimea $K \in P(X)$, dacă $\alpha \geq 0$ şi
$F(x_1) \subseteq F(x_2) + \alpha d(x_1, x_2)\tilde{B}(0; 1)$, $\forall x_1, x_2 \in K$.

DEFINIŢIA 1.9. (X, τ) *spaţiul topologic se numeşte Hausdorff dacă* $\forall x, y \in X$ *exista două mulţimi deschise, disjuncte* $U, V \in \tau$ *care sa conţină x, respectiv y.*

Fie X este un spaţiu topologic compact Hausdorff, E este un spaţiu normat real finit dimensional. Notăm cu Conv(E) mulţimea submulţimilor lui E nevide convexe şi compacte.

În continuare definim distanţa Hausdorff:
$d(A, B) = inf\{\epsilon \in \mathbb{R}_+^* \mid \ A \subset B + \epsilon \cdot \mathbb{B} \ B \subset A + \epsilon \cdot \mathbb{B}\}$
Unde ştim că $\mathbb{B}$ reprezintă bila unitate a lui E de centru 0.

DEFINIŢIA 1.10. *Spunem ca funcţia multivocă* $F : X \longrightarrow Conv(E)$ *se numeşte Hausdorff-continuă in punctul* $x_0 \in X$ *dacă, pentru orice* $\epsilon \in \mathbb{R}_+^*$, *exista o vecinatate* U *a lui* x_0 *pentru care:* $d(F(x), F(x_0)) \leq \epsilon$ *pentru oricare* $x \in U$*; spunem ca* F *este H-continuă dacă este continuă in fiecare* $x_0 \in X$.

Teoria jocurilor studiază interacţiunile strategice dintre indivizi in situaţii numite jocuri. Jocurile au diferite caracteristici, enumerăm in continuare cele mai comune dintre acestea:
i.) Numărul jucătorilor: Fiecare persoană care face alegeri în joc, care primeşte un câştig de pe urma alegerilor făcute se numeşte jucător.
ii.) Strategii per jucător: într-un joc fiecare participant poate alege dintr-o mulţime de posibile acţiuni, acestea fiind cunoscute ca şi strategii.
iii.) Strategii pure şi echilibru Nash: acest echilibru Nash este o mulţime de strategii ce reprezintă răspunsurile mutuale cele mai bune la alte strategii. Considerând doar situaţiile în care participanţii aleg o singura strategie fără să combine strategii, lucru cunoscut şi sub numele de strategie pură, astfel de jocuri pot avea mai multe echilibre Nash.
iv.) Joc secvenţial: acesta se referă la efectuarea acţiunilor unui jucător după un altul, altfel se încadrează în jocurile cu acţiuni simultane din partea jucătorilor.
v.) Informaţie perfectă : ne referim la jocurile secvenţiale, în care fiecare jucător cunoaşte strategiile alese de jucătorii care l-au precedat.
vi.) Suma constantă: în această situaţie suma câştigurilor fiecărui jucător este aceeaşi pentru orice set de strategii, în astfel de jocuri un jucător castigă, iar celălalt pierde, un exemplu în acest sens este jocul piatră-hârtie-foarfecă.
vii.) Jocuri non-cooperative: acestea se referă la jocurile în care participanţii iau deciziile independent unul de celălalt. Este posibil că jucătorii să colaboreze, dar doar cu scopul de a-şi atrage situaţia favorabilă de partea lui.
viii.) Jocuri cooperative: se referă la jocurile în care există grupuri de jucători ce cooperează între ei, astfel jocul este o competiţie între mai multe grupuri de jucători.

Problema de echilibru Nash
În această situaţie jucătorii au interese independente, deci discutăm de joc non-cooperativ, iar aceştia aleg o strategie anume, apoi, pe baza alegerii strategiei există consecinţe. Considerăm cazul în care sunt n jucători cu interese independente.

Notăm cu X_i mulţimea tuturor strategiilor jucătorului i, cu $i = \overline{1,n}$.

Atunci avem ca $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ este mulţimea tuturor vectorilor strategie.

În continuare, notăm câştigul, notat cu $x = (x_1, ..., x_n)$. Alegerile jucătorilor sunt reprezentate de funcţia multivocă: $\tilde{U}_i : X \longrightarrow P(X)$ definită prin:
$\tilde{D}_i(x) = \{y \in X \mid \ y \ \ este \ \ preferat \ \ pentru \ \ x\}$.

În continuare definim funcţia multivocă replica bună ca fiind:
$x_{-i} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n) \in X_{-i}$, unde $X_{-i} = \prod_{k=1,k\neq i} X_k$.

Astfel, y_i este replica bună a jucătorului i in funcţie de vectorul strategie x dacă $x|y_i = (x_1, ..., x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, ..., x_n) \in \tilde{U}_i(X)$.

În acest cadru, funcţia multivocă replica bună corespunzătoare jucătorului i este $U_i : X_{-1} \longrightarrow P(X_i)$ definită prin:
$U_i(x_{-i}) = \{y_i \in X_i \mid \ x|y_i \in \tilde{U}_i(x|u), \forall u \in X_i\}$

Perechea $(X_i, U_i)_{i\in\{1,2,...,n\}}$ se numeşte joc în forma strategică sau economie abstractă.

Considerăm funcţia câştig a jucătorului i ca fiind: $p_i : X \longrightarrow \mathbb{R}$, pentru $i = \overline{1,n}$.

În continuare definim funcţia multivocă replica bună pentru funcţia câştig p_i ca fiind:
$U_i(x_{-i}) = \{y_i \in X_i \mid \ p_i(x|y_i) \geq p_i(x|z), \forall z \in X_i\}$

Un punct de echilibru Nash pentru economia abstractă este $x^* \in X$ dacă $x^*_i \in U_i(x^*_{-i})$, $i = \overline{1,n}$, astfel spus:
$x^*|x^*_i \in \tilde{U}_i(x^*|u)$, $\forall u \in X_i$, $\forall i = \overline{1,n}$.

Astfel, problema de echilibru Nash este reprezentata de următoarea problemă de punct fix:

$x^* \in U(x^*)$, unde $U(x) = \prod_{i=1}^{n} U_i(x_{-i})$

ÎIn cazul în care $x^* \in X$ este echilibru Nash noncooperativ atunci fiecare jucător consideră alegerea sa ca fiind acceptabilă şi nu doreşte sa şi-o schimbe această alegere.

Considerăm, spre exemplu, cazul unui astfel de joc cu n=2 dat de:
$(X_1, U_1), (X_2, U_2)$, unde ştim că:
X_1, X_2 reprezintă strategiile jucătorului 1, respectiv jucătorului 2.
$U_1 : X_2 \longrightarrow P(X_1)$, $U_2 : X_1 \longrightarrow P(X_2)$ funcţiile multivoce replica bună pentru fiecare dintre jucători.

Un punct de echilibru Nash este definit în cazul n=2 astfel: $x_1 \in U_1(x_2^*)$ si $x_2 \in U_2(x_1^*)$

Funcţia multivocă replica bună poate fi scrisă şi sub forma:
$U_i(x) = \{y_i \in X_i \mid \ y_i \in \tilde{U}_i(x)\}$

Din această forma observăm ca $x^* \in X$ este punct de echilibru Nash dacă $U_i(x^*) = \emptyset$, $i = \overline{1,n}$ sau altfel spus $\nexists y_i \in X_i$ pentru care $x^*|y_i$ sa fie preferat de x^*.

Definiţia 1.11. *Fie $F_i : X \longrightarrow P(X_i)$ funcţia multivocă constrângere sau fezabilitate corespunzătoare jucătorului i, unde $i = \overline{1,n}$, care de fapt ne spune care strategii sunt fezabile pentru jucătorul i, în funcţie de vectorul strategii x.*

Astfel avem:
$F : X \longrightarrow P(X)$ funcţia multivocă definită prin: $F(x) = \prod_{i=1}^{n} F_i(x)$

Punctele fixe ale funcţia multivocă F sunt vectorii strategie fezabili, altfel spus $x \in X$, $x \in F(x)$

Definiţia 1.12. *Un joc $(X_i, U_i, F_i)_{i \in 1,2,\ldots,n}$ generalizat sau o economie abstractă generalizată este un joc strategic ce conţine funcţia multivocă fezabilitate.*

Punct de echilibru Nash în contextul unei economii abstracte generalizate este vectorul strategie $x^* \in X$ pentru care $x^* \in F(x^*)$ şi $U_i(x^*) \bigcap F_i(x^*) = \emptyset$, $\forall i = \overline{1,n}$

În continuare abordăm cazurile:
1. $U(x^*) = \emptyset$
2. $U(x^*) = \{x^*\}$ 1.

Teorema 1.2 (Sonnenschein). *Fie $Y \subset \mathbb{R}_+^m$ compact şi convex şi fie $U : Y \longrightarrow P(Y)$ o funcţie multivocă astfel că:*
i.) $x \notin coU(x)$, $\forall x \in Y$;
ii.) Dacă $y \in U^{-1}(x)$, atunci $\exists z \in Y$ (posibil z=y) pentru care $y \in intU^{-1}(z)$.
Atunci $\exists x^* \in Y$: $U(x^*) = \emptyset$ şi $x \in Y \mid \ U(x) = \emptyset$ e compactă.

Corolarul 1.1 (Lema Ky-Fan). *Fie $Y \subset \mathbb{R}_+^m$ compact şi $U : Y \longrightarrow P(Y)$ funcţie multivocă pentru care:*
i.) $x \notin U(x), \forall x \in Y$
ii.) U(x) este convex, $\forall x \in Y$
iii.) Graf U este deschisă un $Y \times Y$
Atunci $\exists x^* \in Y$: $U(x^*) = \emptyset$ şi $x \in Y \mid \ U(x) = \emptyset$ e compactă.

Definiţia 1.13. *Fie (X,d) spaţiu metric şi $T : X \longrightarrow P(X)$ funcţie multivocă. Un şir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se spune că un şir de aproximări succesive pentru T pornind de la $(x, y) \in Graf\ (T)$ dacă: $x_0 = x$, $x_1 = y$ şi $x_{n+1} \in T(x_n), \forall x \in \mathbb{N}^*$*

Teorema 1.3. *Fie (X,d) spaţiu metric complet,* $Y \in P_{cl}(X)$, $T : Y \longrightarrow P_b(Y)$ *operator multivoc Hausdorff-continuu.*

Presupunem că:
i.) Există $\alpha \in [0,1)$ *si* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y$ *şir de aproximaţii succesive pentru* T *pornind de la* $(y_0, y_1) \in Graf\ (T)$ *pentru care:*
$diam\ T(y_{n+1}) \leq \alpha diam\ T(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$*;*
ii.) $y \in T(y)$, $\forall y \in Y$

În aceste condiţii, $\exists y^* \in Y : \{y^*\} = T(y^*)$, *sau altfel spus* y^* *este element maximal.*

2. GENERALIZĂRI

Teorema 2.1. *Fie (X,d) spaţiu metric complet,* $Y \in P_{cl}(X)$, $T_n : Y \longrightarrow P_b(X)$, $n \in \mathbb{N}$ *Hausdorff-continue. Presupunem că: i.)* $\exists \alpha \in [0,1)$, $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y_n \in Y_n$ *:*

$$\begin{cases} y_{n+1} \in T_{n+1}(y_n) \\ y_0 \in Y_0 \end{cases}$$

Pentru care are loc:
$\delta(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \leq \alpha\delta(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1}))$
ii.) $y_n \in T_n(y_n)$
Atunci are loc: $\exists x^* \in Y_n$*:* $T_n(y^*) = y^*$, *sau altfel spus* y^* *este element maximal.*

Demonstraţie. Considerăm $y_0 \in Y$, $y_1 \in T(y_0)$ si $y_{n+1} \in T(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
Din i.) avem că:
$\delta(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \leq \alpha\, \delta(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1})) \leq \alpha^2\delta(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1}))$
$\leq \alpha^n(\delta(T_0(y_0), T_1(y_0))) \longrightarrow 0$ când $n \longrightarrow \infty$, rezultă că $\delta(T_n(y_n)T_{n+1}(y_n)) \longrightarrow 0$.

Astfel avem că $d(y_n, y_{n+p}) \leq d(y_n, y_{n+1}) + ... + d(y_{n+p-1}, y_{n+p})$
$\leq \alpha^n\delta(T_0(y_0), T_1(y_0)) + ... + \alpha^{n+p-1}\delta(T_0(y_0), T_1(y_0)) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\ \delta(T_0(y_0), T_1(y_0))$,
astfel, pentru $n \longrightarrow \infty$ şi $\alpha \in [0,1)$
rezultă că $d(y_n, y_{n+p-1}) \longrightarrow 0$, astfel rezultă ca $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy in spaţiul metric complet (Y,d), astfel $\exists y^* \in X$ pentru care $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = y^*$, dar Y este o mulţime închisă, astfel $y^* \in Y$.

Din ii.) avem că $y^* \in T(y^*)$, dar deoarece $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y^*$ şi ţinând cont că $\delta : P_b(X) \times P_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este continuă, iar $T_n : Y \longrightarrow P_b(Y)$ sunt Hausdorff-continuu, avem că $\delta(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \longrightarrow \delta(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*))$ pentru $n \longrightarrow \infty$, si $\delta(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*)) \longrightarrow 0$ pentru $n \longrightarrow \infty$, astfel rezultă ca $\delta(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*)) = 0$, deci rezultă că $\{y^*\} = T(y^*)$. ■ □

Teorema 2.2. *Fie (X,d) spaţiu metric complet,* $Y \in P_{cl}(X)$, $T_n : Y \longrightarrow P_b(X)$, $n \in \mathbb{N}$ *Hausdorff-continue. Presupunem că: i.)* $\exists \alpha \in [0,1)$, $\exists (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in$

$Y_n \in Y_n$:

$$\begin{cases} y_{n+1} \in T_{n+1}(y_n) \\ y_0 \in Y_0 \end{cases}$$

Pentru care are loc:
$\rho(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \leq \alpha\rho(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1}))$
ii.) $y_n \in T_n(y_n)$
Atunci are loc: $\exists x^* \in Y_n$: $T_n(y^*) = y^*$, sau altfel spus y^* este element maximal.

Demonstraţie. Considerăm $y_0 \in Y$, $y_1 \in T(y_0)$ şi $y_{n+1} \in T(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
Din i.) avem că:
$\rho(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \leq \alpha\, \rho(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1})) \leq \alpha^2\rho(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1}))$
$\leq \alpha^n(\rho(T_0(y_0), T_1(y_0))) \longrightarrow 0$ când $n \longrightarrow \infty$, rezultă că $\rho(T_n(y_n)T_{n+1}(y_n)) \longrightarrow 0$.

Astfel din teorema 2.1 avem că $d(y_n, y_{n+p}) \leq d(y_n, y_{n+1})+...+d(y_{n+p-1}, y_{n+p})$
$\leq \alpha^n\rho(T_0(y_0), T_1(y_0))+...+\alpha^{n+p-1}\rho(T_0(y_0), T_1(y_0)) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\, \rho(T_0(y_0), T_1(y_0))$,
astfel, pentru $n \longrightarrow \infty$ şi $\alpha \in [0, 1)$
rezultă că $d(y_n, y_{n+p-1}) \longrightarrow 0$, astfel rezultă ca $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy in spaţiul metric complet (Y,d), astfel $\exists y^* \in X$ pentru care $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = y^*$, dar Y este o mulţime închisă, astfel $y^* \in Y$.

Din ii.) avem că $y^* \in T(y^*)$, dar deoarece $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y^*$ si ţinând cont că $\rho : P_b(X) \times P_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este continuă, iar $T_n : Y \longrightarrow P_b(Y)$ sunt Hausdorff-continuu, avem că $\delta(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \longrightarrow \delta(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*))$ pentru $n \longrightarrow \infty$, si $\rho(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*)) \longrightarrow 0$ pentru $n \longrightarrow \infty$, astfel rezultă ca $\rho(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*)) = 0$, deci rezultă că $\{y^*\} = T(y^*)$. ■ □

Teorema 2.3. *Fie (X,d) spaţiu metric complet, $Y \in P_{cl}(X)$, $T_n : Y \longrightarrow P_b(X)$, $n \in \mathbb{N}$ Hausdorff-continue. Presupunem că: i.) $\exists\alpha \in [0, 1)$, $\exists(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y_n \in Y_n$:*

$$\begin{cases} y_{n+1} \in T_{n+1}(y_n) \\ y_0 \in Y_0 \end{cases}$$

Pentru care are loc:
$H(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \leq \alpha H(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1}))$
ii.) $y_n \in T_n(y_n)$
Atunci are loc: $\exists x^* \in Y_n$: $T_n(y^*) = y^*$.

Demonstraţie. Considerăm $y_0 \in Y$, $y_1 \in T(y_0)$ şi $y_{n+1} \in T(y_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$
Din i.) avem că:
$H(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \leq \alpha\, H(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1})) \leq \alpha^2 H(T_{n-1}(y_{n-1}), T_n(y_{n-1}))$
$\leq \alpha^n(H(T_0(y_0), T_1(y_0))) \longrightarrow 0$ când $n \longrightarrow \infty$, rezultă că $H(T_n(y_n)T_{n+1}(y_n)) \longrightarrow 0$.

Astfel, din teorema 2.2 avem că $d(y_n, y_{n+p}) \leq d(y_n, y_{n+1})+...+d(y_{n+p-1}, y_{n+p})$
$\leq \alpha^n H(T_0(y_0), T_1(y_0))+...+\alpha^{n+p-1}H(T_0(y_0), T_1(y_0)) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}\, H(T_0(y_0), T_1(y_0))$,

astfel, pentru $n \longrightarrow \infty$ şi $\alpha \in [0,1)$
rezultă că $d(y_n, y_{n+p-1}) \longrightarrow 0$, astfel rezultă ca $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este Cauchy in spaţiul metric complet (Y,d), astfel $\exists y^* \in X$ pentru care $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} y_n = y^*$, dar Y este o mulţime închisă, astfel $y^* \in Y$.

Din ii.) avem că $y^* \in T(y^*)$, dar deoarece $\lim_{n\longrightarrow\infty} y_n = y^*$ şi ţinând cont că $H : P_b(X) \times P_b(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ este continuă, iar $T_n : Y \longrightarrow P_b(Y)$ sunt Hausdorff-continuu, avem că $H(T_n(y_n), T_{n+1}(y_n)) \longrightarrow H(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*))$ pentru $n \longrightarrow \infty$, si $H(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*)) \longrightarrow 0$ pentru $n \longrightarrow \infty$, astfel rezultă ca $H(T_n(y^*), T_{n+1}(y^*)) = 0$, deci rezultă că $\{y^*\} = T(y^*)$. ■ □

BIBLIOGRAFIE

[1] Muresan, A., Non-cooperative Games, Second Edition, Editura Mega, Cluj-Napoca, 2012.

[2] Mot, G., Petrusel, A., Petrusel, G., Topics in Nonlinear Analysis and Applications to Mathematical Economics, Editura House of the Book Science, 2007.

[3] Lirkov, I., Margenov, S., Waśniewiki, J., Large-Scale Scientific Computing, 7th International Conference, LSSC 2009, Sazopol, Bulgaria, June 2009, Reviewed Papers, Editura Springer, Sazopol, 2009.

[4] Trandafir, R., Modele si Algoritmi de Optimizare, Editura Agir, Bucuresti, 2004.

[5] Bolyanov, T., Dimova, S., Georgiev, K, Nikolov, K, Numerical Methods and Applications, 6th International Conference NMA 2006, Borovets, Bulgaria, August 20-24, 2006, Revised Papers, Springer, Borovets, 2006.

[6] Başar, T, Oldser, G.J., Dynamic Noncooperative Game Theory, 2nd edition, Editura Classics in applied mathematics, 1999.

[7] Huttenlocher, D.P., Klanderman, G.A., Rucklidge, W.J.,Comparing Images Using Hausdorff Distance, IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence, Vol. 15, NO. 9, September 1993.

[8] Campiti, M., A Korovkin-Type Theorem for set-valued Hausdorff continuous functions, Le Matematiche, Vol. XLII (1987), Fasc. I-II, pp.29-55, 1987.

Master of Applied Mathematics
Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Cluj-Napoca, Romania
e-mail: fun_tastiq@yahoo.com

Primit la redacţie: 20 Mai 2015