DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 33(2015), pp. 81–89

PUNCTE LAEMMEL - PROPRIETĂŢI - LEGĂTURA CU PUNCTELE BROCARD ŞI CU AL DOILEA CERC AL LUI LEMOINE

Adriana-Cosmina Sârb

Abstract. Fie triunghiul ABC. Primul punct al lui Laemmel este punctul P situat astfel încât $PA' \perp BC, PB' \perp CA, PC' \perp AB$ şi $AC' = BA' = CB' := x$. În această lucrare vom studia proprietăţile punctelor Laemmel, legătura cu punctele Brocard şi cu al doilea cerc al lui Lemoine.

MSC 2000. 51F02.
Key words. puncte Laemmel, puncte Brocard, al doilea cerc al lui Lemoine.

1. INTRODUCERE

DEFINIŢIA 1. ***Coordonate triliniare.*** *Fiind dat un triunghi ABC, coordonatele triliniare ale unui punct P în raport cu triunghiul ABC este un triplet de numere proporţionale cu distanţele de la P la laturile triunghiului. Notaţie. Coordonatele triliniare se notează $\alpha : \beta : \gamma$ sau (α, β, γ).*

OBSERVAŢIA 1. *Cum doar raportul distanţelor e semnificativ, orice triplet de coordonate triliniare obţinut înmulţind un triplet dat cu o constantă nenulă, descrie acelaşi punct*

$$\alpha : \beta : \gamma = \lambda\alpha : \lambda\beta : \lambda\gamma. \tag{1}$$

DEFINIŢIA 2. ***Coordonate triliniare exacte.*** *Coordonatele triliniare exacte sunt coordonatele triliniare $a' : b' : c'$ (unde a', b', c' sunt distanţele punctului la laturi).*

DEFINIŢIA 3. ***Funcţia centrului triunghiului.*** *Fie coordonatele triliniare $\alpha : \beta : \gamma$ ale unui centru într-un triunghi. Funcţia centrului triunghiului este funcţia $f(a, b, c)$, nenulă şi omogenă ($f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c)$), pentru care*

$$\alpha : \beta : \gamma = f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b). \tag{2}$$

DEFINIŢIA 4. ***Coordonate ariale (de suprafaţă)).*** *Fie punctul P de coordonate triliniare (α, β, γ) şi $\sigma = A_{ABC}$, atunci $x = \delta A_{PBC}$, unde $\delta = 1$ dacă P se află în interiorul triunghiului ABC (faţă de latura BC), altfel $\delta = -1$. Analog se obţine y şi z.*
Coordonatele $\frac{x}{\sigma} : \frac{y}{\sigma} : \frac{z}{\sigma}$ se numesc coordonate ariale (de suprafaţă) ale punctului P.

DEFINIŢIA 5. ***Coordonate baricentrice.*** *Coordonatele baricentrice ale unui punct în raport cu un triunghi sunt orice triplet $x' : y' : z'$ care satisfice* *relaţiile*

$$x' = kx, y' = ky, z' = kz, k \neq 0. \tag{3}$$

Observaţia 2. ***Legătura dintre coordonatele triliniare şi coordonatele baricentrice.*** *Dacă P este un punct de coordonate triliniare $\alpha : \beta : \gamma$, atunci $P = a\alpha : b\beta : c\gamma$ sunt baricentricele (unde a, b, c sunt lungimile laturilor tirunghiului).*

Definiţia 6. ***Bicentre.*** *Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor unui triunghi, $f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b)$ un punct, unde f este o funcţie omogenă în a, b, c:*

$$f(ta, tb, tc) = t^n f(a, b, c), n \geq 0 \tag{4}$$

$$|f(a, c, b)| \neq |f(a, b, c)|, \tag{5}$$

atunci punctele

$$\begin{cases} (f(a, b, c) : f(b, c, a) : f(c, a, b) \\ f(a, c, b) : f(b, a, c) : f(c, b, a) \end{cases} \tag{6}$$

se numesc bicentre.

Definiţia 7. ***Puncte Brocard.*** *Primul punct al lui Brocard este punctul Ω (Fig. 1) pentru care are loc*

$$m(\Omega\hat{B}C) = m(\Omega\hat{C}A) = m(\Omega\hat{A}B) = \omega. \tag{7}$$

Al doilea punct al lui Brocard este punctul Ω' (Fig. 1) pentru care are loc

$$m(\Omega'\hat{C}B) = m(\Omega'\hat{A}C) = m(\Omega'\hat{B}A) = \omega'. \tag{8}$$

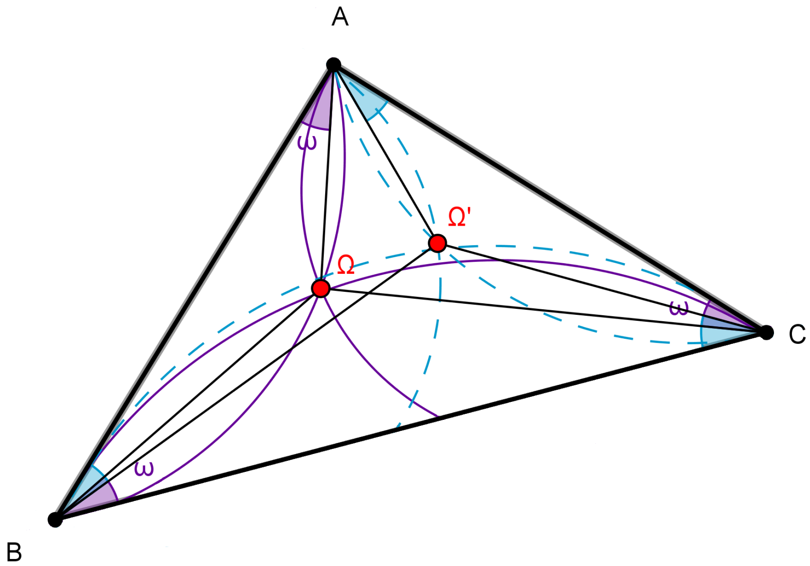

Fig. 1 *Punctele Brocard*

PROPOZIŢIA 1. *Punctele Ω şi Ω' sunt puncte izogonale şi $\omega = \omega'$.*
Justificare. Fie x, y, z distanţele de la punctului Ω la laturile triunghiului şi x', y', z' distanţele de la punctul Ω' la laturile triunghiului.
Avem

$$xx' = yy' = zz' = 4R^2 \sin^2 \omega \sin^2 \omega'.$$

Rezulă Ω şi Ω' sunt izogonale $=> \omega = \omega'$.

DEFINIŢIA 8. ***Puncte Laemmel.*** *Fie triunghiul ABC (Fig. 2) cu lungimile laturilor a, b, c şi punctele Ω şi Ω' ale lui Brocard. Notăm cu P (primul punct al lui Laemmel) punctul situat astfel încât*

$$PA' \perp BC, PB' \perp CA, PC' \perp AB \tag{9}$$

$$AC' = BA' = CB' = x \tag{10}$$

şi cu P' (al doilea punct al lui Laemmel) punctul conjugat izotomic lui P situat astfel încât

$$P'A'' \perp BC, P'B'' \perp CA, P'C'' \perp AB \tag{11}$$

$$AC'' = BA'' = CB'' = x. \tag{12}$$

2. PROPRIETĂŢI ALE PUNCTELOR LAEMMEL

PROPRIETATEA 1. *Fie triunghiul ABC (Fig. 2) cu lungimile laturilor a, b, c, punctele Ω şi Ω' ale lui Brocard şi punctele P şi P' ale lui Laemmel precum în definiţia de mai sus.*
Valoarea lui x este $\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a + b + c)}$ şi este unica soluţie a problemei.

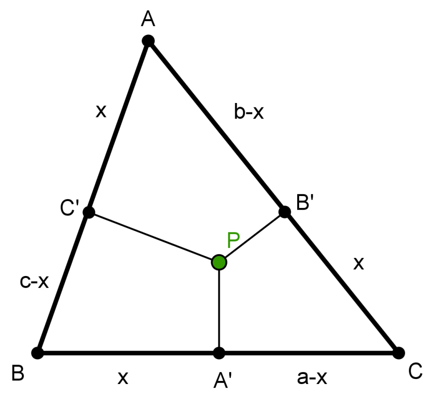

Fig. 2 *Punctul lui Laemmel*

Demonstraţie

Pentru ca dreptele PA', PB', PC' să fie concurente impunem condiţia (lema lui Carnot):

$$BA'^2 + CB'^2 + AC'^2 = CA'^2 + AB'^2 + BC'^2. \tag{13}$$

Ştiind că $AC' = BA' = CB' = x$ şi că $C'B = c - x, A'C = a - x, B'A = b - x$, avem:

$$3x^2 = (a - x)^2 + (b - x)^2 + (c - x)^2 \tag{14}$$

$$3x^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ax - 2bx - 2cx + 3x^2 \tag{15}$$

$$x = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2(a + b + c)}. \tag{16}$$

Rezultă că problema are o unică soluţie $x > 0$.

Proprietatea 2. *Dacă trasăm perpendicularele pe laturile AB, BC, CA prin punctele A, B respectiv C (Fig. 3), atunci punctul P este centrul cercului înscris triunghiului DEF iar x raza cercului înscris al acestui triunghi.*

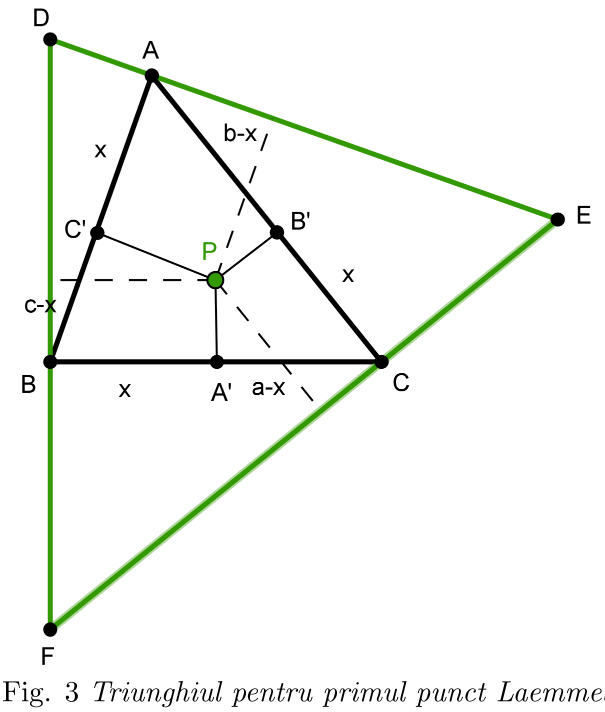

Fig. 3 *Triunghiul pentru primul punct Laemmel*

Proprietatea 3. *Dacă considerăm segmentele orientale, unul dintre segmentele BA', CB', AC' poate lua valori negative. În acest caz, P este excentru (Fig. 4), iar numitorul valorii lui x nu va mai fi $4p$, ci $4(p - a)$ sau $4(p - b)$ sau $4(p - c)$* $\left(p = \dfrac{a + b + c}{2}\right)$.

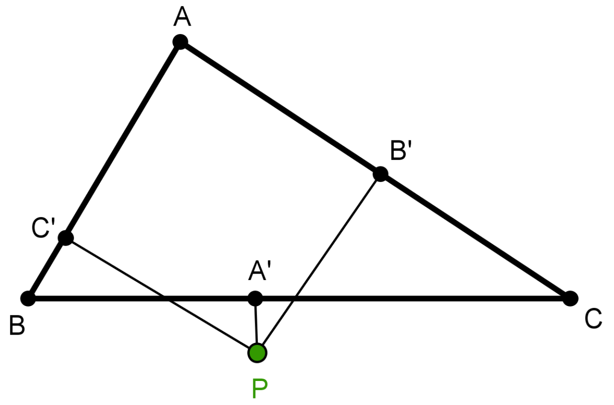

Fig. 4 *Punct Laemmel exterior triunghiului*

PROPRIETATEA 4. *Dacă orientarea triunghiului ABC se schimbă, valoarea lui x rămâne neschimbată, dar poziţia lui P se modifică, devenind P' (Fig. 5). Punctul P' este simetricul lui P în raport cu centrul cercului circumscris triunghiului ABC.*

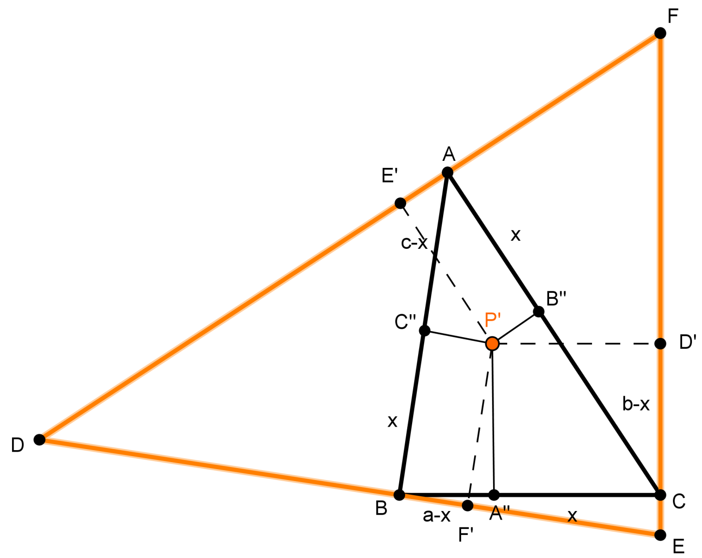

Fig. 5 *Al doilea punct al lui Laemmel*

PROPRIETATEA 5. *Punctul P este primul punct al lui Laemmel, iar P' al doilea punct al lui Laemmel.*

PROPRIETATEA 6. *x este segmentul lui Laemmel.*

PROPRIETATEA 7. *Punctul P are coordonatele*

$$(\cos C \cos A \sin B - \cos C \sin A + \sin C \quad : \quad \cos A \cos B \sin C - \cos A \sin B + \sin A \quad :$$

$$\cos B\cos C\sin A-\cos B\sin C+\sin B). \tag{17}$$

Demonstraţie
Ştim că

$$x=\frac{a^2+b^2+c^2}{2(a+b+c)} <=> x=r\cot\omega$$

$$\alpha=\frac{c}{\sin B}-x\cot\frac{B}{2}$$

$$\alpha=\frac{c}{2\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}}-\frac{(a^2+b^2+c^2)}{2(a+b+c)}\frac{\cos\frac{B}{2}}{\sin\frac{B}{2}}.$$

Aducem fracţiile la acelaşi numitor şi dăm factor comun

$$\alpha=\frac{1}{(a+b+c)\sin B}\left[c(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)\cos^2\frac{B}{2}\right]$$

$$\alpha=\frac{1}{a+b+c}\frac{1}{\frac{b}{2R}}\left[c(a+b+c)-(a^2+b^2+c^2)\frac{a+cosB}{2}\right]$$

$$\alpha=\frac{R}{a+b+c}\frac{1}{b}\left[2ac+2bc+2c^2-a^2-b^2-c^2-(a^2+b^2+c^2)\cos B\right]$$

$$\alpha=\frac{R}{a+b+c}\left[\frac{2ac+2bc+2c^2-a^2-b^2-c^2-(a^2+b^2+c^2)\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{b}\right]$$

$$\alpha=\frac{R}{4pabc}(4a^2c^2+4abc^2+4ac^3-2a^3c-2ab^2c-2ac^3-$$
$$-a^4-a^2c^2+a^2b^2-b^2a^2-b^2c^2+b^4-c^2a^2-c^4+c^2b^2)$$

$$\alpha=\frac{R}{4pabc}(-a^4+b^4-c^4+2a^2c^2-2a^3c-2ab^2c+2ac^3+4abc^2+b^2c^2-b^2c^2+a^2b^2-a^2b^2)$$

$$\alpha=\frac{2R^2}{p}\left[\frac{a^2b^2+a^2c^2-a^4+b^4+b^2c^2-b^2a^2-c^2b^2-c^4+c^2a^2}{8Rabc}-\frac{2ac(a^2+b^2-c^2)}{8Rabc}+\frac{4abc^2}{8Rabc}\right]$$

$$\alpha=\frac{2R^2}{p}\left[\frac{a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(b^2+c^2-a^2)-c^2(b^2+c^2-a^2)}{8Rabc}-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\frac{a}{2R}+\frac{c}{2R}\right]$$

$$\alpha=\frac{2R^2}{p}\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\frac{b}{2R}-\cos C\sin A+\sin C\right)$$

$$\alpha=\frac{2R^2}{p}(\cos C\cos A\sin B-\cos C\sin A+\sin C) \tag{18}$$

Analog,

$$\beta=\frac{2R^2}{p}(\cos A\cos B\sin C-\cos A\sin B+\sin A) \tag{19}$$

$$\gamma=\frac{2R^2}{p}(\cos B\cos C\sin A-\cos B\sin C+\sin B) \tag{20}$$

Făcând abstracţie de factorul de proporţionalitate $\dfrac{2R^2}{p}$ se obţine ceea ce s-a cerut.

3. LEGĂTURA CU PUNCTELE BROCARD

PROPOZIŢIA 2. *Segmentul lui Laemmel $x = r\cot\omega$, unde r este raza cercului înscris triunghiului ABC.*

Demonstraţie
Vom arăta că triunghiul DEF construit precum în Fig. 5 este asemenea cu triunghiul ABC şi raportul de asemănare este $\cot\omega$.
Construim triunghiul DEF astfel încât $DE \perp AB$ în punctul B, $EF \perp BC$ în punctul C, $FD \perp CA$ în punctul A (Fig. 5).
Triunghiurile ABC şi DEF sunt asemenea (au laturile respectiv perpendiculare). Avem, deci

$$m(F\hat{D}E) = m(B\hat{A}C), m(E\hat{F}D) = m(A\hat{C}B) \tag{21}$$

$$FD = FA + AD = b\cot(AFC) + \frac{c}{\sin(ADB)} = b\cot C + \frac{c}{\sin A} =$$

$$= b\left(\cot C + \frac{c}{b\sin A}\right) = b\left(\cot C + \frac{\sin C}{\sin A\sin B}\right) \tag{22}$$

Ştim însă că

$$\frac{\sin C}{\sin A\sin B} = \frac{\sin(A+B)}{\sin A\sin B} = \frac{\sin A\cos B + \sin B\cos A}{\sin A\sin B} = \cot B + \cot A \tag{23}$$

Înlocuind (21) în (20) obţinem

$$FD = b(\cot C + \cot B + \cot A) = b\cot\omega \tag{24}$$

Analog,

$$DE = c\cot\omega, EF = a\cot\omega \tag{25}$$

Din relaţiile (22) şi (23) rezultă că raportul de asemănare este $\cot\omega$.

PROPRIETATEA 8. ***Maximul unghiului Brocard.*** *este de $\dfrac{\pi}{6}$ şi nu este atins decât în cazul triunghiului echilateral.*

Demonstraţie
Avem întotdeauna

$$\cot^2\omega - 3 \geq 0 => \cot\omega \geq \sqrt{3} => \omega \leq \frac{\pi}{6}.$$

Proprietatea 9. ***Estimarea lui x*** *Are loc următoarea relaţie pentru segmentul lui Laemmel*

$$x \geq r\sqrt{3} \tag{26}$$

unde r este raza cercului înscris triunghiului. Egalitatea are loc în triunghiul echilateral.

Demonstraţie

$$x = r \cot \omega$$
$$\cot \omega \geq \sqrt{3}$$
$$x \geq r\sqrt{3}.$$

4. LEGĂTURA CU AL DOILEA CERC AL LUI LEMOINE

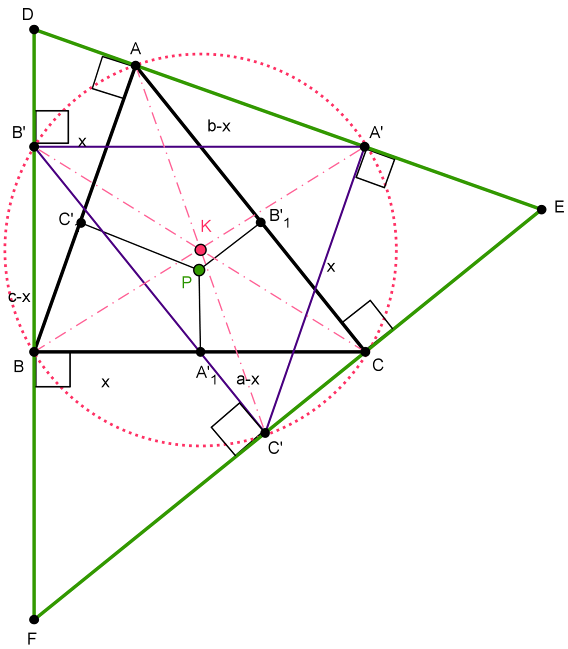

Fig. 6 *Al doilea cerc al lui Lemoine şi punctul lui Laemmel*

Propoziţia 3. *Dacă prin punctul K al lui Lemoine al triunghiului ABC se duc MN, PQ, RS antiparalele la laturi (de exemplu, MN este antiparalelă cu BC dacă $m(A\hat{M}N) = m(\hat{C})$), atunci punctele M, N, P, Q, R, S se află pe un cerc numit al doilea cerc al lui Lemoine al triunghiului ABC.*

Propoziţia 4. *Vârfurile triunghiului direct orientat, ABC, şi vârfurile triunghiului retrograd, $A'B'C'$, se află pe al doilea cerc al lui Lemoine (Fig. 6).*

BIBLIOGRAFIE

[1] César Cosnitza, Coordonnées Barycentriques, Editura Bucureşti, 1941;
[2] Clark Kimberling, Bicentric Pairs of points and related Triangle Centers, Forum Geometricorum, 2003, 35-47;
[3] Dorin Andrica, Csaba Varga, Daniel Văcăreţu, Teme şi probleme alese de geometrie, Editura Plus, 2002;
[4] Peter Yff, An analogue of the Brocard points, American Univerity of Beirut, 1963, 495-497;
[5] S.L.Loney, The Elements of Coordinate Geometry, Part II. Trilinear Coordinates, Etc., Macmillan, Londra, 1957;
[6] Traian Lalescu,Geometria triunghiului, Editura Tineretului, 1958;
[7] William Allen Withworth, Trilinear Coordinates, Bell and Sons, Londra, 1866;
[8] Clark Kimberling, Bicentric Pairs of points and related Triangle Centers, Forum Geometricorum, 2003, 35-47;
[9] Clark Kimberling, Triangle Centers and Central Triangles, Congressus Numeratium., Volum 129, 1998, 1-295;
[10] Clark Kimberling, Triangle centers as functions, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Volum 23, 1993, 1269-1286;
[11] Darij Grinberg, Brocard points and Laemmel points-new bicentric points, Hyacinthos message 7088, 4 Mai 2003:
https://groups.yahoo.com/neo/groups/Hyacinthos/conversations/messages/7088.

Universitatea Babeş-Bolyai, Departamentul de Matematică
Cluj-Napoca, Strada Mihail Kogălniceanu, nr. 1
e-mail: `sarb.adriana@yahoo.com`

Primit la redacţie: 15 Mai 2015