DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 33(2015), pp. 67–80

UTILIZAREA FUNCŢIILOR GENERATOARE ÎN DEMONSTRAREA IDENTITĂŢILOR

Andreea A. Sandor

Abstract. In this paper there are presented two different types of generating functions, ordinary and exponential generating functions. There are also presented some applications using classical methods and the snake oil method.
MSC 2000. 05A15.
Key words. generating function, snake oil method.

1. NOŢIUNI INTRODUCTIVE

Fiind dat un şir de numere $a_0, a_1, a_2, \dots$, dorim să aflăm o formulă generală pentru termenii şirului. Din păcate, nu tot timpul este posibil să aflăm acest lucru, fapt care a dus la introducerea funcţiilor generatoare.

De fapt, aceste funcţii sunt nişte serii formale de puteri de forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

unde $a_0, a_1, a_2, \dots$ sunt chiar termenii şirului pe care dorim să îl aflăm.

Funcţiile generatoare sunt des utilizate în:

- găsirea unei formule exacte pentru termenii unui şir;
- găsirea unei formule de recurenţă;
- calculul mediilor sau a altor proprietăţi statistice;
- demonstrarea convexităţii unei funcţii;
- demonstrarea unor identităţi.

Asemenea altor funcţii, funcţiile generatoare pot fi adunate, înmulţite sau derivate. Astfel există următoarele operaţii:

1. Adunarea

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{unde } c_n = a_n + b_n.$$

2. Înmulţirea

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad \text{unde } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

3. Derivarea formală

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \Rightarrow A'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \ .$$

În continuare vom introduce o notaţie ce va fi folosită pe tot parcursul lucrării.

Definiţia 1. *Fie $f(x)$ o serie de puteri ale lui x. Prin simbolul $[x^n]f(x)$ vom nota coeficientul lui x^n din seria $f(x)$.*

De exemplu, $[x^n]e^x = \frac{1}{n!}$.

Observaţia 1. *O proprietate a acestei notaţii este următoarea:*

$$[x^n](x^a f(x)) = [x^{n-a}]f(x).$$

O altă notaţie folosită în această lucrare este $\binom{n}{k}$, $n, k \in \mathbb{N}$, $n \geq k$ şi anume numărul combinărilor de n luate câte k. De asemenea se consideră ca şi convenţie $\binom{n}{k} = 0$ pentru $n < k$. Numerele n şi k verifică următoarea relaţie de recurenţă

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}. \tag{1}$$

În continuare voi prezenta câteva serii de puteri cunoscute ce vor fi folosite pe parcursul lucrării. Acestea nu includ demonstraţii deoarece se presupun a fi cunoscute.

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n \geq 0} x^n, \quad |x| < 1, \tag{2}$$

$$e^x = \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}, \tag{3}$$

$$\sin x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{4}$$

$$\cos x = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \tag{5}$$

$$(1+x)^n = \sum_{k} \binom{n}{k} x^k, \tag{6}$$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n} \binom{n+k}{n} x^n, \quad k \geq 0, \tag{7}$$

$$\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n, \quad k \geq 0. \tag{8}$$

DEFINIŢIA 2. *O serie f este funcţia generatoare ordinară a şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ dacă*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Notaţie: *$f \overset{ops}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ (ordinary power series).*

DEFINIŢIA 3. *O serie f este funcţia generatoare exponenţială a şirului $(a_n)_{n\geq 0}$ dacă*

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

Notaţie: *$f \overset{egf}{\longleftrightarrow} (a_n)_{n\geq 0}$ (exponential generating function).*

2. APLICAŢII

2.1. Metode clasice.

EXERCIŢIUL 1. *Fie şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$, $a_0 = 0$. Să se afle funcţia generatoare a acestui şir.*

Soluţie. *Fie $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ funcţia generatoare a şirului. Înmulţim atât membrul stâng cât şi membrul drept cu x^n*

$$a_{n+1} x^n = 2a_n x^n + x^n,$$

apoi însumăm de la 0 la ∞

$$\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n = \sum_{n\geq 0} 2a_n x^n + \sum_{n\geq 0} x^n.$$

Considerăm membrul stâng al egalităţii

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} a_{n+1} x^n &= a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots \\ &= \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots - a_0}{x} \\ &= \frac{A(x) - a_0}{x} \\ &= \frac{A(x)}{x}\end{aligned}$$

iar apoi membrul drept

$$\sum_{n\geq 0} (2a_n + 1) x^n = 2A(x) + \sum_{n\geq 0} x^n = 2A(x) + \frac{1}{1-x}.$$

Egalând membrul stâng cu membrul drept obţinem

$$\frac{A(x)}{x} = 2A(x) + \frac{1}{1-x}.$$

Prin urmare, $A(x) = \dfrac{x}{(1-x)(1-2x)}$.

Dacă dorim să găsim o formulă explicită pentru (a_n) *procedăm în felul următor:*

$$\begin{aligned}\frac{x}{(1-x)(1-2x)} &= \frac{1}{1-2x} - \frac{1}{1-x}\\ &= (1 + 2x + 2^2x^2 + 2^3x^3 + \ldots) - (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)\\ &= (2-1)x + (2^2-1)x^2 + (2^3-1)x^3 + \ldots\end{aligned}$$

De aici va rezulta că $2^n - 1$ *va fi coeficientul lui* x^n*, aşadar am obţinut* $a_n = 2^n - 1$, $\forall n \geq 0$.

Un alt exemplu foarte cunoscut este şirul lui Fibonacci.

Exerciţiul 2. *Fie* $(F_n)_{n\geq 0}$ *şirul definit prin următoarea relaţie de recurenţă*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (n \geq 1; F_0 = 0; F_1 = 1). \tag{9}$$

Folosind metoda utilizată în exemplul anterior, dorim să găsim funcţia generatoare a şirului,

$$F(x) = \sum_{n\geq 0} F_n x^n.$$

Soluţie: *Pentru a calcula funcţia generatoare, se înmulţeşte relaţia (9) cu* x^n *şi se însumează de la* $n \geq 1$*. Membrul stâng devine*

$$F_2x + F_3x^2 + F_4x^3 + \ldots = \frac{F(x) - x}{x},$$

iar în membrul drept găsim

$$(F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \ldots) + (F_0x + F_1x^2 + F_2x^3 + \ldots) = F(x) + xF(x).$$

Cele două rezultate se egalează

$$\frac{F(x) - x}{x} = F(x) + xF(x),$$

iar funcţia generatoare obţinută este

$$F(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

Pentru a găsi formula termenului general, se descompune funcţia generatoare în două fracţii. Numitorul funcţiei se poate descompune astfel:

$$1 - x - x^2 = (1 - xr_+)(1 - xr_-) \quad \left(r_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right).$$

Aşadar,

$$\frac{x}{1-x-x^2}=\frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)}$$

Încercăm să descompunem fracţia de mai sus în două fracţii cu următoarea metodă

$$\frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)}=\frac{A}{1-xr_+}+\frac{B}{1-xr_-}.$$

Aducând la numitor comun şi grupând termenii se obţine

$$\frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)}=\frac{x(-Ar_-+Br_+)+A-B}{(1-xr_+)(1-xr_-)}.$$

După egalarea coeficienţilor găsim necunoscutele $A=B=\dfrac{1}{r_+-r_-}$. *Aşadar funcţia generatoare a şirului are următoarea descompunere*

$$\frac{x}{(1-xr_+)(1-xr_-)}=\frac{1}{r_+-r_-}\left(\frac{1}{1-xr_+}-\frac{1}{1-xr_-}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{j\geq 0}r_+^jx^j-\sum_{j\geq 0}r_-^jx^j\right).$$

Termenul general al şirului se obţine egalând coeficienţii lui x^n *din egalitatea*

$$\sum_{n\geq 0}F_nx^n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{n\geq 0}r_+^nx^n-\sum_{n\geq 0}r_-^nx^n\right).$$

În final,

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}(r_+^n-r_-^n)\qquad(n=0,1,2,\ldots)\tag{10}$$

Această formulă ne ajută şi să găsim o aproximare pentru F_n, *atunci când* n *este foarte mare. Într-adevăr, când* n *este foarte mare, deoarece* $|r_-|<1$ *şi* $r_+>1$, *al doilea termen din (10) va fi foarte mic în comparaţie cu primul, aşadar o foarte bună aproximare este*

$$F_n\sim\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

EXERCIŢIUL 3. *O inversiune a unei permutări a mulţimii* $\{1,2,\ldots,n\}$ *este o pereche de indici* (i,j) *cu proprietatea că, dacă* $i<j$, *atunci* $\sigma(i)>\sigma(j)$. *Cu alte cuvinte, o inversiune este o pereche "în ordinea greşită" din cea de-a doua linie a permutării.*

De exemplu, permutarea din $\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9\\4&9&2&5&8&1&6&7&3\end{pmatrix}$ *are 19 inversiuni.*

Fie $b(n,k)$ *numărul permutărilor mulţimii* $\{1,2,\ldots,n\}$ *care au exact* k *inversiuni. Găsiţi o formulă simplă pentru funcţia generatoare*

$$B_n(x)=\sum_{k\geq 0}b(n,k)x^k.$$

Soluţie: *Fie j fixat, $1 \leq j \leq n$. Considerăm doar acele permutări σ de n elemente care au $\sigma(j) = n$. Atunci, nici o inversiune nu îl are pe j ca al doilea membru din pereche. Există exact $n - j$ inversiuni care îl au pe j ca şi primul membru al perechii.*

Prin urmare, dacă îl ştergem pe n din şirul valorilor lui σ, obţinem o permutare de $n - 1$ elemente, cu $n - j$ mai puţine inversiuni. Aşadar,

$$b(n,k) = \sum_{j=1}^{n} b(n-1, k-n+j) \tag{11}$$

Înmulţim cu x^k şi însumăm pentru $k \geq 0$. În membrul stâng se obţine:

$$\sum_{k\geq 0} b(n,k)x^k = B_n(x)$$

Membrul drept devine:

(12)
$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\sum_{j=1}^{n} b(n-1,k-n+j)x^k =& \sum_{k\geq 0} b(n-1,k-(n-1))x^k \\ &+ \sum_{k\geq 0} b(n-1,k-(n-2))x^k + \\ &+ \ldots + \sum_{k\geq 0} b(n-1,k-1)x^k + \sum_{k\geq 0} b(n-1,k)x^k\end{aligned}$$

Se observă că ultimul termen al sumei este chiar $B_{n-1}(x)$. Fiecare termen al sumei se va trata separat. Fie suma:

$$\sum_{k\geq 0} b(n-1,k-(n-1))x^k.$$

Se realizează schimbarea de variabilă $t_1 = k - (n-1) \Rightarrow k = t_1 + (n-1)$. Astfel suma devine:

$$\begin{aligned}\sum_{t_1\geq -(n-1)} b(n-1,t_1)x^{t_1+(n-1)} =& x^{n-1} \sum_{t_1\geq -(n-1)} b(n-1,t_1)x^{t_1} \\ =& x^{n-1} \sum_{t_1\geq 0} b(n-1,t_1)x^{t_1} \\ =& x^{n-1} B_{n-1}(x).\end{aligned}$$

La fel se procedează cu următoarea sumă şi anume $\sum_{k\geq 0} b(n-1,k-(n-2))x^k$. Se realizează schimbarea de variabilă $t_2 = k-(n-2) \Rightarrow k = t_2 + (n-2)$.

Suma devine:

$$\sum_{t_2\geq -(n-2)} b(n-1,t_2)x^{t_2+(n-2)} = x^{n-2}\sum_{t_2\geq -(n-2)} b(n-1,t_2)x^{t_2} = x^{n-2}\sum_{t_2\geq 0} b(n-1,t_2)x^{t_2}$$
$$= x^{n-2}B_{n-1}(x).$$

Analog se vor rezolva şi restul sumelor. Penultima sumă, $\sum_{k\geq 0} b(n-1,k-1)x^k$ *se va prelucra astfel: se face schimbarea de variabilă* $t_{n-1}=k-1$ *de unde rezultă că* $k=t_{n-1}+1$. *Suma devine:*

$$\sum_{t_{n-1}\geq -1} b(n-1,t_{n-1})x^{t_{n-1}+1} = x\sum_{t_{n-1}\geq 0} b(n-1,t_{n-1})x^{t_{n-1}} = xB_{n-1}(x).$$

Înlocuind rezultatele obţinute in relaţia (12), *membrul drept devine:*

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 0}\sum_{j=1}^{n} b(n-1,k-n+j)x^k =& x^{n-1}B_{n-1}(x)+x^{n-2}B_{n-2}(x)\\ &+\ldots+xB_{n-1}(x)+B_{n-1}(x)\\ =& B_{n-1}(x)(x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+x+1)\end{aligned}$$

Egalând membrul stâng cu membrul drept se obţine:

$$\begin{aligned}B_n(x) =& (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})B_{n-1}(x)\\ =& (1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})(1+x+\ldots+x^{n-2})B_{n-2}(x)\\ =& \ldots\\ =& (1+x)(1+x+x^2)\ldots(1+x+x^2+\ldots+x^{n-1})\end{aligned}$$

Aşadar $b(n,k)$ *va fi coeficientul lui* x^k *din produsul de mai sus.*

Exerciţiul 4. *Să se demonstreze cu ajutorul funcţiilor generatoare relaţia*

$$\overline{C_n^k} = \binom{n+k-1}{k},$$

unde $\overline{C_n^k}$ *reprezintă numărul combinărilor cu repetiţie de* n *luate câte* k.

Soluţie. *Pentru a rezolva acest exerciţiu avem nevoie mai întâi de o definiţie a acestor combinări şi de o teoremă ce va fi folosită în cadrul rezolvării.*

Definiţia 4. *Se numeşte combinare cu repetiţie de* n *luate câte* k *un sistem ordonat* $(k_1,k_2,\ldots,k_n)$ *de numere naturale cu* $k_1+k_2+\ldots+k_n=k$.

Teorema 1. *Există o bijecţie între numărul combinărilor cu repetiţie de* n *luate câte* k *şi mulţimea soluţiilor întregi pozitive ale ecuaţiei*

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=k. \tag{13}$$

Aşadar pentru a calcula numărul combinărilor cu repetiţie de n luate câte k este suficient să calculăm numărul soluţiilor ecuaţiei (13).

Fie $f(n,k)$ numărul acestor soluţii şi fie $F_n(x) = \sum_{k\geq 0} f(n,k)x^k$ funcţia generatoare a lui $f(n,k)$. Vom împărţi mulţimea soluţiilor în două mulţimi. Prima mulţime va conţine soluţiile pentru care $x_1 = 0$. Acestea vor fi în număr de $f(n-1,k)$. În cea de-a doua mulţime vom avea soluţiile care au $x_1 \geq 1$. Dacă notăm $x_1' = x_1 - 1(\geq 0)$, atunci fiecare din aceste soluţii corespunde exact unei soluţii de forma $x_1' + x_2 + \ldots + x_n = p-1$. Aşadar numărul acestor soluţii este $f(n,p-1)$.

Am obţinut astfel următoarea formulă de recurenţă

$$f(n,k) = f(n-1,k) + f(n,k-1).$$

Asemenea exemplelor anterioare, pentru a lucra cu funcţii generatoare vom înmulţi relaţia de recurenţă cu x^k şi vom însuma pentru $k \geq 1$. În plus avem condiţiile iniţiale $f(n,0) = 1$ şi $f(1,p) = 1$. Avem

$$\begin{aligned}\sum_{k\geq 1} f(n,k)x^k =& \sum_{k\geq 1} f(n-1,k)x^k + \sum_{k\geq 1} f(n,k-1)x^k\\ F_n(x) - 1 =& F_{n-1}(x) - 1 + xF_n(x)\\ F_n(x) =& F_{n-1}(x) + xF_n(x)\end{aligned}$$

Prin urmare $F_n(x) = \dfrac{1}{1-x}F_{n-1}(x)$. Din condiţiile iniţiale va rezulta

$$F_n(x) = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

Numărul combinărilor cu repetiţie de n luate câte k va fi egal cu coeficientul lui x^k din descompunerea lui $\dfrac{1}{(1-x)^n}$. Vom utiliza rezultatul demonstrat în subsecţiunea următoare şi anume

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} x^k = \frac{1}{(1-x)^n}$$

Se observă uşor că $\binom{n+k-1}{k}$ este coeficientul lui x^k din descompunerea lui $\dfrac{1}{(1-x)^n}$.

În concluzie,

$$\overline{C_n^k} = \binom{n+k-1}{k}.$$

2.2. Metoda snake oil. Această metodă se utilizează în rezolvarea diferitelor sume combinatorice. Este foarte utilă mai ales pentru rezolvarea anumitor sume mai complicate. În continuare vom da câteva exemple de sume care se calculează folosind metoda snake oil. Această metodă are un algoritm clasic de rezolvare, aceiaşi paşi fiind aplicaţi indiferent de exerciţiu.

Avantajul metodei este că are o rată de succes ridicată şi nu necesită foarte mult timp de gândire. Este uşor de sesizat când anume se poate aplica şi cand anume suma nu se poate calcula cu metoda aleasă. Pentru a simplifica aplicarea metodei snake oil se fac diferite convenţii. Una dintre ele este omiterea scrierii limitelor de însumare atunci când ele nu sunt menţionate în problemă. Dacă o variabilă nu are limită de însumare, ea se consideră a lua valori de la $-\infty$ la $+\infty$. O altă convenţie se referă la combinări. Astfel $\binom{n}{k}$ se anulează pentru $k < 0$ sau pentru $n < k$. În calculul următoarelor sume se vor utiliza câteva serii formale de puteri menţionate în secţiunea 1, dar pentru uşurinţă le vom reaminti din nou.

Prima serie folosită se va deduce din seria (7) astfel:

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_n \binom{n+k}{n} x^n = x^{-k} \sum_n \binom{n+k}{n} x^{n+k},$$

se face schimbarea de variabilă $r = n + k$ şi se obţine seria

$$\sum_{r \geq 0} \binom{r}{k} x^r = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}, \quad (k \geq 0). \tag{14}$$

Celelalte două serii se găsesc deja în secţiunea 1, dar vor fi rescrise şi în acest paragraf. Acestea sunt:

$$\sum_r \binom{n}{r} x^r = (1+x)^n \tag{15}$$

şi

$$\sum_n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} x^n = \frac{1}{2x}(1 - \sqrt{1-4x}). \tag{16}$$

Metoda constă în aplicarea următorilor paşi:

- â Identificăm variabila de care nu depinde suma, de exemplu n şi notăm această sumă. Presupunem că notaţia va fi $f(n)$.
- â Considerăm $F(x)$ ca fiind funcţia generatoare ordinară pentru care $f(n)$ este coeficientul lui x^n
- â Înmulţim întreaga sumă cu x^n şi însumăm pentru n. În membrul stâng va apărea funcţia generatoare $F(x)$ iar în membrul drept va fi o sumă dublă.
- â Interschimbăm cele două sume şi scoatem înafara sumei termenii care nu depind de n. Vom încerca să aducem cea de-a doua sumă la o serie de puteri cunoscută a cărei sumă o cunoaştem.
- â În final încercăm să egalăm coeficienţii lui x^n din ambii termeni obţinând astfel suma iniţială $f(n)$.

În continuare se vor da câteva exemple concrete de aplicare a acestei metode pe baza datelor de mai sus.

EXERCIŢIUL 5. *Să se calculeze următoarea sumă*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}, \quad (n=0,1,2,\ldots).$$

Soluţie. *Variabila care nu depinde de* k *este* n, *aşadar suma va fi* $f(n)$. *Prin urmare,*

$$f(n)=\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}.$$

Se vor înmulţi ambii membrii cu x^n *şi se va însuma după* n. *Astfel se obţine*

$$\sum_n f(n)x^n=\sum_n\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}x^n.$$

Fie $F(x)$ *funcţia generatoare a lui* $f(n)$. *Relaţia de mai sus se poate rescrie astfel*

$$F(x)=\sum_n x^n\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k}.$$

Următorul pas în aplicarea metodelor reprezintă interschimbarea sumelor din membrul drept

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}\sum_n\binom{k}{n-k}x^n.$$

Următorul pas constă în determinarea sumei interioare. Pentru a face acest lucru este necesar ca puterea lui x *să fie aceeaşi cu indexul care apare în coeficientul binomial. Pentru a ajunge de la puterea* n *a lui* x *la puterea* $n-k$ *se va înmulţi şi împărţi cu* x^k. *Rezultatul este*

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_n\binom{k}{n-k}x^{n-k}.$$

Acum puterea lui x *este aceeaşi ca şi indexul inferior al coeficientului binomial. Se face schimbarea de variabilă* $r=n-k$, *iar suma devine*

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k\sum_r\binom{k}{r}x^r.$$

Se observă imediat că cea de-a doua sumă este chiar $(1+x)^k$, *aşadar*

$$F(x)=\sum_{k\geq 0}x^k(1+x)^k=\sum_{k\geq 0}(x+x^2)^k=\frac{1}{1-x-x^2}.$$

Funcţia generatoare obţinută mai sus este una cunoscută şi anume funcţia generatoare a şirului lui Fibonacci calculată în capitolul 2. Prin urmare s-a obţinut $f(n) = F_{n+1}$. În concluzie,

$$\sum_{k\geq 0}\binom{k}{n-k} = F_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Exerciţiul 6. *Demonstraţi următoarea egalitate fără a evalua cele două sume*

$$\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k, \quad (m, n \geq 0).$$

Soluţie. *Pentru fiecare membrul al egalităţii se va calcula funcţia generatoare cu ajutorul metodei snake oil după care se va observa că cele două sume sunt egale. Mai întâi se lucrează cu membrul stâng. Se înmulţeşte cu x^n şi se însumează pentru $n \geq 0$. Se obţine*

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_k \binom{m}{k}\binom{n+k}{m}x^n =& \sum_k \binom{m}{k}x^{-k}\sum_{n\geq 0}\binom{n+k}{m}x^{n+k}\\ \overset{(14)}{=}& \sum_k \binom{m}{k}x^{-k}\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\\ =&\frac{x^m}{(1-x)^{m+1}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^m\\ =&\frac{(1+x)^m}{(1-x)^{m+1}}.\end{aligned} \tag{17}$$

În acelaşi fel se va proceda şi cu membrul drept

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}\sum_k \binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k =& \sum_k \binom{m}{k}2^k\sum_{n\geq 0}\binom{n}{k}x^n\\ \overset{(14)}{=}& \sum_k \binom{m}{k}2^k\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\\ =&\frac{1}{1-x}\sum_k \binom{m}{k}\left(\frac{2x}{1-x}\right)^k\\ \overset{(15)}{=}&\frac{1}{1-x}\left(1+\frac{2x}{1-x}\right)^m\\ =&\frac{(1+x)^m}{(1-x)^m+1}.\end{aligned} \tag{18}$$

Din relaţiile (17) şi (18) rezultă că funcţiile generatoare sunt egale, aşadar cele două sume sunt egale.

Exerciţiul 7. *Să se demonstreze formula*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}z^k=\frac{1}{(1-z)^n}.$$

Soluţie: *Fie* $f_n=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}z^k$. *Se înmulţeşte relaţia cu* x^n *obţinându-se*

$$f_nx^n=\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}z^kx^n.$$

Se însumează relaţia pentru $n\geq 0$.

$$\sum_{n\geq 0}f_nx^n=\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}\binom{n+k-1}{k}z^kx^n.$$

Fie F *funcţia generatoare a lui* f_n. *Se vor inversa cele două sume, iar relaţia anterioară devine*

$$\begin{aligned}
F(x)=&\sum_{k\geq 0}z^k\sum_{n\geq 0}\binom{n+k-1}{k}x^n\\
=&\sum_{k\geq 0}z^kx^{1-k}\sum_{n\geq 0}\binom{n+k-1}{k}x^{n+k-1}\\
\overset{(8)}{=}&\sum_{k\geq 0}z^kx^{1-k}\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\\
=&\sum_{k\geq 0}z^k\frac{x}{(1-x)^{k+1}}\\
=&\frac{x}{1-x}\sum_{k\geq 0}\left(\frac{z}{1-x}\right)^k\\
=&\frac{x}{1-x}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{1-x}}\\
=&\frac{x}{1-x-z}.
\end{aligned}$$

Aşadar am obţinut $\sum_{n\geq 0}f_nx^n=\dfrac{x}{1-x-z}$. *Pentru a calcula* f_n *trebuie să găsim coeficientul lui* x^n *din extinderea lui* $\dfrac{x}{1-x-z}$.

(19)
$$\frac{x}{1-x-z}=x\frac{1}{1-(x+z)}=x(1+(x+z)+(x+z)^2+(x+z)^3+(x+z)^4+\dots)$$

Prin urmare avem nevoie de coeficientul lui x^{n-1} *din extinderea*

$$1 + (x+z) + (x+z)^2 + (x+z)^3 + (x+z)^4 + \ldots$$

Vom extinde fiecare sumă de forma $(x+z)^n$ *cu ajutorul binomului lui Newton, unde* $n \geq 0$. *Termenul* x^{n-1} *apare începând cu termenul* $(x+z)^{n-1}$ *unde are coeficientul* $\binom{n-1}{0}$, *apoi în termenul* $(x+z)^n$ *unde are coeficientul* $\binom{n}{1}z$. *Procedând analog observăm*

(20)

$$[x^{n-1}]\frac{1}{1-x-z} = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}z + \binom{n+1}{2}z^2 + \binom{n+2}{3}z^3 + \binom{n+3}{4}z^4 + \ldots$$

Pentru a ajunge la rezultatul dorit mai este necesar să arătăm că

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}z + \binom{n+1}{2}z^2 + \binom{n+2}{3}z^3 + \binom{n+3}{4}z^4 + \ldots$$

Demonstraţia se va face prin inducţie. Vom nota cu $P(n)$ *identitatea de mai sus. Pentru* $n = 1$ *aceasta devine*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-z} &= \binom{0}{0} + \binom{1}{1}z + \binom{2}{2}z^2 + \binom{3}{3}z^3 + \ldots \\ &= 1 + z + z^2 + z^3 + \ldots\end{aligned}$$

$P(1)$ *a fost astfel demonstrat. În continuare presupunem* $P(n)$ *adevărat şi demonstrăm* $P(n+1)$.

(21)

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-z)^{n+1}} &= \frac{1}{(1-z)^n} \cdot \frac{1}{1-z} \\ &= \left(\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}z + \binom{n+1}{2}z^2 + \binom{n+2}{3}z^3 + \ldots\right) \cdot \\ &\quad \cdot (1 + z + z^2 + z^3 + \ldots) \\ &= \binom{n-1}{0} + z\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1}\right) + z^2\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2}\right) + \\ &\quad + z^3\left(\binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{3}\right) + \ldots \\ &\overset{(1)}{=} \binom{n}{0} + z\binom{n+1}{1} + z^2\left(\binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{2}\right) + \ldots \\ &\overset{(1)}{=} \binom{n}{0} + \binom{n+1}{1}z + \binom{n+2}{2}z^2 + \binom{n+3}{3}z^3 + \ldots\end{aligned}$$

Aşadar $P(n) \rightarrow P(n+1)$, *oricare ar fi* $n \geq 1$.

Din relaţiile (19), (20), (21) egalând coeficienţii lui x^n va rezulta că

$$\sum_{k\geq 0} \binom{n+k-1}{k} z^k = \frac{1}{(1-z)^n}$$

BIBLIOGRAFIE

[Co] L. Comtet, Advanced Combinatorics: the Art of Finite and Infinite Expansions, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1974.
[Mu] M. Mureşan, A Concrete Approach to Classical Analysis, Springer, New York, 2009.
[Ri] J. Riordan, Combinatorial Identities, John Wiley & Sons, New York, 1968.
[To] I. Tomescu, Introducere în combinatorică, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.
[Wi] H.S. Wilf, generatingfunctionology, Academic Press Inc., New York, 1990 şi 1994.

e-mail: `sandor.andreea4@gmail.com`

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania

Primit la redacţie: 25 Mai 2015