DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 33(2015), pp. 27–37

APLICAŢII ALE FORMULELOR LUI NEWTON PENTRU POLINOAME SIMETRICE

Cristina-Aida Coman

Abstract. In this paper we present some applications of Newton's formulae for symmetric polynomials. Using the fundamental symmetric polynomials, several problems met at high-school mathematical competitions may be solved in an elegant and unified manner.

MSC 2000. 11C08, 97H20.

Key words. Symmetric polynomials, Newton formulae, characteristic polynomial.

1. INTRODUCERE

Această lucrare prezintă câteva aplicaţii ale formulelor lui Newton, cunoscute în algebra polinoamelor. Subiectul acestei lucrări este folositor elevilor de liceu, pregătiţi pentru concursuri şcolare, sau extra-şcolare.
Primul capitol al acestei lucrări este o parte de *Preliminarii*, o mica introducere în polinoame simetrice, câteva noţiuni şi rezultate remarcabile.
Cel de-al doilea capitol, intitulat *Formulele lui Newton*, introduce formulele lui Newton, prezintă exprimarea polinoamelor simetrice fundamentale în sume de puteri, şi invers, a sumelor de puteri în polinoame simetrice fundamentale. La finalul capitolului, am prezentat două aplicaţii în alte rezultate ale formulelor lui Newton, respectiv, aplicaţie in polinomul caracteristic al unei matrice, şi aplicaţie în rădăcinile unui polinom.
Ultimul capitol, este un capitol de *Aplicaţii*, în care am prezentat folosirea formulelor lui Newton. Aceste exerciţii pot fi întâlnite şi la concursurile şcolare sau extra-şcolare, deci reprezintă modele de lucru, utile pentru pregătirea concursurilor şcolare şi extra-şcolare, sau examenelor.

2. PRELIMINARII

Fie R un inel asociativ, comutativ cu unitate şi $n \in \mathbb{N}$, iar S_n grupul permutărilor mulţimii $\{1, ..., n\}$. Pentru orice permutare $\sigma \in S_n$ există un singur endomorfism $\bar{\sigma} : R[X_1, ..., X_n] \to R[X_1, ..., X_n]$ care $\forall a \in R, \bar{\sigma}(a) = a$ şi $\forall i \in \{1, ..., n\}, \bar{\sigma}(X_i) = X_{\sigma(i)}$.
Pentru orice polinom

$$f = \sum a_{i_1,...i_n} X_1^{i_1} ... X_n^{i_n}$$

avem
$$\bar{\sigma}(f) = \sum a_{i_1,...i_n} X_{\sigma(1)}^{i_1} ... X_{\sigma(n)}^{i_n},$$
adică acţiunea lui $\bar{\sigma}$ asupra lui f constă în permutarea nedeterminatelor $X_1, ..., X_n$ prin σ.

DEFINIŢIA 1. *Un polinom $f \in R[X_1, ..., X_n]$ se numeşte* ***polinom simetric*** *dacă $\bar{\sigma}(f) = f$, pentru $\forall \sigma \in S_n$, adică f nu se schimbă la nicio permutare a nedeterminatelor.*

Cu alte cuvinte, un polinom f este simetric dacă şi numai dacă f nu se schimbă la nicio transpoziţie a nedeterminatelor.

Exemple

- Orice $a \in R$ este polinom simetric.
- Polinoamele
  $s_1 = X_1 + X_2 + ... + X_n,$
  $s_2 = X_1X_2 + X_1X_3 + ... + X_{n-1}X_n,$
  $s_3 = X_1X_2X_3 + X_1X_2X_4 + ... + X_{n-2}X_{n-1}X_n,$
  ...
  $s_n = X_1X_2...X_n$
  sunt simetrice.

Polinoamele $s_1, s_2, ..., s_n$ se numesc **polinoame simetrice fundamentale**. Numărul termenilor polinomului $s_k, 1 \leq k \leq n$ este C_n^k. Orice polinom $f \in R[X_1, ..., X_n], f \neq 0$ se scrie în mod unic ca o sumă de monoame de clase diferite din $M/\rho \cap \rho^1$. Prin urmare, monoamele care intervin în exprimarea lui f se pot aranja într-un şir descrescător în raport cu relaţia $\leq$, iar cel mai mare monom din acest şir se numeşte **termenul principal** al lui f.

TEOREMA 1. *Dacă $f \in R[X_1, ..., X_n]$ este un polinom simetric, iar*
$$\alpha = aX_1^{i_1}...X_n^{i_n}$$
termenul său principal, atunci $i_1 \geq i_2 \geq ... \geq i_n$.

Demonstraţie. Să presupunem că există k astfel încât $i_k < i_{k+1}$. Cum f este simetric, atunci monomul
$$aX_1^{i_1}...X_i^{k_{i+1}}X_{i+1}^{k}...X_n^{i_n}$$
este un termen al lui f, dar evident este mai mare că $aX_1^{i_1}...X_n^{i_n}$, ceea ce este absurd, acesta fiind termenul principal. $\square$

TEOREMA 2. ***(Teorema fundamentală a polinoamelor simetrice)*** *Fiecare polinom simetric*
$f \in R[X_1, ..., X_n]$ se poate exprima ca un polinom de polinoame simetrice fundamentale.
Cu alte cuvinte, există un polinom $g \in R[X_1, ..., X_n]$ astfel încât
$$f = g(s_1, ...s_n).$$

Mai mult, g este unic determinat prin această proprietate.

Demonstraţie. Fie $f \in A[X_1, .., X_n]$ de grad n, astfel încât $\forall \sigma \in S_n$, avem $\bar{\sigma}(f) = f$.
ştim că f se poate scrie în mod unic ca

$$f = f_0 + ... + f_n,$$

unde f_i sunt polinoame omogene, astfel încât $grad(f_i) = i$. Cu $\bar{\sigma}$ este omomorfism, rezultă că

$$\bar{\sigma}(f) = \bar{\sigma}(f_0) + ... + \bar{\sigma}(f_n).$$

Dar cum $\bar{\sigma}(f) = f$, din unicitatea scrierii lui f ca sumă de polinoame omogene, rezultă că $\bar{\sigma}(f_i) = f_i$, pentru orice i, adică f_i sunt polinoame simetrice omogene cu gradul egal cu i.
Aşadar, putem presupune fără a restrânge generalitatea că f este un polinom simetric omogen. Să presupunem de asemenea că $grad(f) = m$, iar $aX_1^{k_1}...X_n^{k_n} (a \neq 0)$ este termenul său principal.
Rezultă că $k_1 \geq ... \geq k_n$.
Să considerăm produsul $s_1^{d_1}...s_n^{d_n} (d_i \geq 0)$.
Cum termenul principal al lui s_i este $X_1...X_i$ urmează că termenul principal din $s_1^{d_1}...s_n^{d_n}$ este

$$X_1^{d_1+...+d_n} X_2^{d_2+...+d_n} ... X_n^{d_n}.$$

Aşadar, termenul principal al lui $s_1^{k_1-k_2} s_2^{k_2-k_3} ... s_n^{k_n}$ este $X_1^{k_1}...X_n^{k_n}$, adică este acelaşi cu al lui f şi deci termenul principal al polinomului simetric

$$f_1 = f - as_1^{k_1-k_2} s_2^{k_2-k_3} ... s_n^{k_n}$$

este mai mic decât al lui f.
Să continuăm procedeul pentru f_1.
Deoarece există doar un număr finit de monoame de grad m, după un număr finit de paşi procedeul se opreşte. Astfel se ajunge la o expresie a lui f ca polinom de $s_1, ..., s_n$.
Să demonstrăm unicitatea.
Pentru aceasta, observăm mai întâi că este suficient să demonstrăm că dacă $h \in A[X_1, ..., X_n]$ şi
$h(s_1, ..., s_n) = 0$, rezultă că $h = 0$, deoarece atunci dacă,

$$g(s_1, ..., s_n) = g_1(s_1, ..., s_n),$$

rezultă, punând $h = g - g_1$, ca $h(s_1, ..., s_n) = 0$, şi deci $h = 0$, adică $g = g_1$.
Presupunem deci că $h = \sum a_{i_1...i_n} X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$ şi $\sum a_{i_1...i_n} s_1^{i_1}...s_n^{i_n} = 0$ şi să arătăm că toţi coeficienţii sunt nuli.
Presupunem prin absurd că există coeficienţi nenuli şi fie $a_{d_1...d_n} \neq 0$ unul dintre aceştia.
Atunci, luăm polinomul $s_1^{i_1}...s_n^{i_n}$ care are termenul principal $X_1^{i_1}...X_n^{i_n}$, unde $k_i = d_i + d_{i+1} + ... + d_n$, al cărui grad este

$$m = \sum_{i=1}^{n} k_i = \sum_{i=1}^{n} i d_i.$$

Mai mult, dacă $s_1^{d'_1}...s_n^{d'_n} \neq s_1^{d_1}...s_n^{d_n}$, atunci termenii principali respectivi, $X_1^{k'_1}...X_n^{k'_n}$ şi $X_1^{k_1}...X_n^{k_n}$ sunt diferiţi.
Într-adevăr, dacă $k'_i = k_i$, pentru $i = 1, 2, ..., n$ atunci

$$d'_i + ... + d'_n = d_i + ... + d_n$$

pentru $i = 1, 2, ..., n$.
De asemenea rezultă că $d'_1 = d_1,\ d'_2 = d_2,\ ..., d'_n = d_n$. Deci termenii principali în $X_1, ..., X_n$ ai diferitelor monoame distincte în $s_1, ..., s_n$ care apar în expresia lui h nu se reduc.
Fie $X_1^{m_1}...X_n^{m_n}$ cel mai mare termen principal.
Atunci în expresia polinomului h în funcţie de $X_1, ..., X_n$ apare termenul nenul $a_{m_1...m_n} X_1^{m_1}...X_n^{m_n}$, ceea ce contrazice faptul că h este polinomul nul. □

3. FORMULELE LUI NEWTON

Printre polinoamele simetrice vom considera pe cele de forma

$$t_k = X_1^k + X_2^k + ... + X_n^k, k = 1, 2, ...$$

Aceste polinoame, numite **sume de puteri**, trebuie să se exprime, conform teoremei fundamentale, prin polinoamele simetrice fundamentale $s_1, s_2, ..., s_n$. Vom stabili relaţiile dintre polinoamele $t_1, t_2, ...$ şi polinoamele $s_1, s_2, ..., s_n$. Notăm polinomul

$$S(X_1^{k_1} X_2^{k_2} ... X_n^{k_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} X_{\sigma(1)}^{k_1} X_{\sigma(2)}^{k_2} ... X_{\sigma(n)}^{k_n}.$$

adică suma termenilor care se obţin făcând toate permutările nedeterminatelor.

- **Cazul I**
  Pentru $k \leq n$ următoarele relaţii sunt imediate:
  $(-1) \quad \cdot \quad | \qquad t_{k-1}s_1 = t_k + S(X_1^{k-1}X_2),$
  $(-1)^2 \quad \cdot \quad | \qquad t_{k-2}s_2 = S(X_1^{k-1}X_2) + S(X_1^{k-2}X_2X_3),$
  $(-1)^3 \quad \cdot \quad | \qquad t_{k-3}s_3 = S(X_1^{k-2}X_2X_3) + S(X_1^{k-3}X_2X_3X_4),$
  ....
  $(-1)^{k-2} \cdot | \qquad t_2 s_{k-2} = S(X_1^3 X_2 ... X_{k-2}) + S(X_1^2 ... X_{k-1}),$
  $(-1)^{k-1} \cdot | \qquad t_1 s_{k-1} = S(X_1^2 X_2 ... X_{k-1}) + k s_k,$
  adunând aceste relaţii obţinem:

$$t_k - t_{k-1}s_1 + t_{k-2}s_2 + ... + (-1)^k k s_k = 0. \tag{1}$$

- **Cazul II**
  Prima metoda :
  Pentru $k \geq n$ următoarele relaţii sunt imediate:
  $(-1) \quad \cdot \quad | \quad t_{k-1}s_1 = t_k + S(X_1^{k-1}X_2),$
  $(-1)^2 \quad \cdot \quad | \quad t_{k-2}s_2 = S(X_1^{k-1}X_2) + S(X_1^{k-2}X_2X_3),$
  ....
  $(-1)^{n-1} \cdot | \quad t_{k-n+1}s_{n-1} = S(X_1^{k-n+2}X_2...X_{n-1}) + S(X_1^{k-n+1}X_2...X_n),$
  $(-1)^n \cdot \quad | \quad t_{k-n}s_n = S(X_1^{k-n+1}X_2...X_n),$
  adunând aceste relaţii obţinem:

$$t_k - t_{k-1}s_1 + t_{k-2}s_2 + ... + (-1)^n t_{k-n}s_n = 0. \tag{2}$$

A doua metoda :
Fie polinomul $P = (Y - X_1)...(Y - X_n) \in \mathbb{Q}(X_1, ..., X_n)[Y]$
Folosind relaţiile lui Viete, obţinem:

$P = Y^n - s_1Y^{n-1} + s_2Y^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}s_{n-1}Y + (-1)^n s_n.$
Din $P(X_1) = P(X_2) = ... = P(X_n) = 0$ obţinem:
$X_1^n - s_1X_1^{n-1} + s_2X_1^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}s_{n-1}X_1 + (-1)^n s_n = 0 \ | \cdot X_1^{k-n}$
....
$X_n^n - s_1X_n^{n-1} + s_2X_n^{n-2} + ... + (-1)^{n-1}s_{n-1}X_n + (-1)^n s_n = 0 \ | \cdot X_n^{k-n}$
adunând aceste relaţii, obţinem ecuaţia (1.2)

$$t_k - t_{k-1}s_1 + t_{k-2}s_2 + ... + (-1)^n t_{k-n}s_n = 0. \tag{3}$$

Formulele obţinute sunt cunoscute ca *formulele lui Newton*.

4. EXPRIMAREA SUMELOR DE PUTERI CU AJUTORUL POLINOAMELOR SIMETRICE FUNDAMENTALE

Formulele lui Newton ne permit să găsim succesiv expresiile polinoamelor $t_1, t_2, ...$ în funcţie de $s_1, s_2, ..., s_n$.
Astfel $t_1 = s_1$.
Pentru $k = 2 \leq n$ avem $t_2 = s_1^2 - 2s_2$
Pentru $k = 3 \leq n$ avem $t_3 = s_1^3 - 3s_1s_2 + 3s_3$.
Pentru $k = 4 \leq n$ avem $t_4 = s_1^4 - 4s_1^2s_2 + 4s_3s_1 + 2s_2^2 - 4s_4$.
Formula generală pentru $k, n \in \mathbb{N}$

$$t_k = \sum_{r_1+2r_2+...+br_n=k} (-1)^k \frac{k(r_1 + ... + nr_{n-1})!}{r_1!...r_n!} \prod_i = 1^n(-s_i)_i^r$$

5. EXPRIMAREA POLINOAMELOR SIMETRICE FUNDAMENTALE CU AJUTORUL SUMELOR DE PUTERI

Folosind prima formulă a lui Newton, dacă în inelul R se poate efectua împărţirea la orice număr natural n, putem exprima polinoamele simetrice fundamentale $s_1, s_2, ...s_n$ prin primele n sume de puteri $t_1, t_2, ..., t_n$.

Astfel,
$s_1 = t_1$,
$s_2 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2)$,
$s_3 = \frac{1}{6}(t_1^3 - 3t_1t_2 + 3t_3), ...$
$s_4 = \frac{1}{24}(t_1^4 - 6t_1^2t_2 + 3t_2^2 + 8t_1t_3 - 6t_4)$
Formula generală este:

$$s_k = \sum_{r_1+...+nr_n=k} (-1)^k \prod_{i=1}^{n} \frac{(-t_i)^{r_i}}{r_i! i^{k_i}}$$

6. APLICAŢIE ÎN POLINOAMELE CARACTERISTICE ALE UNEI MATRICI

Când polinomul este un polinom caracteristic de matrice A, rădăcinile x_i, sunt valorile proprii ale matricii, numărând şi multiplicitatea lor algebrică.
Pentru orice k natural, A^k are valorile proprii x_i^k, orice valoare proprie $x_i \in A$ contribuie cu multiplicitatea lui la valoarea proprie x_i^k a lui A^k.
Atunci coeficienţii polinomului caracteristic al lui A^k sunt daţi de polinoamele simetrice fundamentale în acele puteri x_i^k.
În particular, suma x_i^k este cea de-a k suma de puteri t_k ale rădăcinilor polinomului caracteristic al lui A, care este dat de

$$t_k = Tr(A^k)$$

Formulele lui Newton identifică urmele puterilor A^k cu coeficienţii polinomului caracteristic al lui A.
Invers, folosindu-le pentru a exprima polinoamele simetrice fundamentale în sume de puteri, pot fi folosite pentru a determina polinomul caracteristic, determinând puterile A^k şi urmele lor.
Această determinare implică determinarea urmelor matricilor A^k şi rezolvarea unui sistem triunghiular de ecuaţii.
Conform teoremei Cayley-Hamilton, orice matrice satisface polinomul său caracteristic, şi o simplă transformare permite determinarea matricii inverse.

7. APLICAŢIE ÎN RĂDĂCINILE UNUI POLINOM

Un polinom cu rădăcinile x_i poate fi scris astfel:

$$\prod (x - x_i) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n+k} s_{n-k} x^k$$

unde s_{n-k} reprezintă polinomul simetric fundamental de rang $n - k$.
Fiind date sumele de puteri

$$t_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k,$$

coeficienţii polinomului cu rădăcinile $x_1, ..., x_n$ pot fi exprimaţi recursiv în termeni cu ajutorul sumelor de puteri:

$s_1 = t_1,$
$s_2 = \frac{1}{2}(t_1^2 - t_2),$
$s_3 = \frac{1}{6}(t_1^3 - 3t_1t_2 + 3t_3), ...$
$s_4 = \frac{1}{24}(t_1^4 - 6t_1^2t_2 + 3t_2^2 + 8t_1t_3 - 6t_4).$
Formulând polinomul astfel este folositor folosind metoda lui Delves şi Lyness pentru a găsi rădăcinile unei funcţii analitice.

8. APLICAŢII

APLICAŢIA 1. *Fie* $f = (X_1^2 + X_2^2)(X_2^2 + X_3^2)(X_3^2 + X_4^2)$. *Să se exprime* f *în funcţie de polinoamele simetrice fundamentale.*

Observăm că f *este polinom simetric în* $\mathbb{Q}[X_1, X_2, X_3]$. f *este polinom omogen de grad 6.*
Termenul principal este $tp(f) = X_1^4X_2^2$.
Fie $f_1 = f - s_1^2s_2^2$.
Ştim că f_1 *este de asemenea simetric, omogen de grad 6 şi* $tp(f_1) < tp(f)$.
Deci $tp(f_1) = aX_1^4X_2X_3$, *unde* $a \in \mathbb{Q}$, *coeficient nedeterminat.*
Fie $f_2 = f_1 - as_1^3s_3$.
Atunci f_2 *este polinom simetric, omogen de grad 6 şi* $tp(f_2) < tp(f_1)$.
Deci $tp(f_2) = bX_1^3X_2^3$.
Fie $f_3 = f_2 - bs_2^3$.
Atunci f_3 *este polinom simetric, omogen de grad 6 şi* $tp(f_3) < tp(f_2)$.
Deci $tp(f_3) = cX_1^3X_2^2X_3$.
Fie $f_4 = f_3 - cs_1s_2s_3$.
Atunci f_4 *este polinom simetric, omogen de grad 6 şi* $tp(f_4) < tp(f_3)$. *Deci* $tp(f_4) = dX_1^2X_2^2X_3^2$.
Fie $f_5 = f_4 - ds_3^2$.
Atunci f_5 *este polinom simetric omogen de grad 6 şi* $tp(f_5) < tp(f_4)$, $tp(f_5)$ *nu se mai poate construi, deci* $f_5 = 0$.
Adunând expresiile membru cu membru, obţinem

$$f = s_1^2s_2^2 + as_1^3s_3 + bs_2^3 + cs_1s_2s_3 + ds_3^2,$$

unde $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ *sunt coeficienţi nedeterminaţi.*

Construim următorul tabel cu datele obţinute, şi dăm valori necunoscutelor, pentru a afla coeficienţii a, b, c, d.

X_1	X_2	X_3	$E(s_1)$	$E(s_2)$	$E(s_3)$	$E(f)_1$	$E(f)_2$
1	1	0	2	1	0	2	4+b
2	-1	-1	0	-3	2	50	-27b+4d
1	-2	-2	-3	0	4	200	-108a+16d
1	-1	-1	-1	-1	1	8	1-a-b+c+d

În urma acestui tabel găsim $a = -2,\ b = -2,\ c = 4,\ d = -1$.

În concluzie, polinomul căutat, f *este*

$$f = s_1^2 s_2^2 - 2 * s_1^3 s_3 - 2s_2^3 + 4s_1 s_2 s_3 - s_3^2.$$

APLICAŢIA 2. *Fie* $f = X_1^3X_2 + ... + X_1^3X_n + X_2^3X_1 + X_2^3X_3 ... + X_2^3X_n + ... + X_n^3X_1 + ... + X_n^3X_{n-1}$. *Să se exprime* f *în funcţie de polinoamele simetrice fundamentale.*

Scriem f *sub forma*

$$f = X_1^4 + X_1^3X_2 + ... + X_1^3X_n + X_2^3X_1 + X_2^4 + ... + X_2^3X_n + ...$$
$$+X_n^3X_1 + ... + X_n^3X_{n-1} + X_n^4 - (X_1^4 + ... + X_n^4) =$$
$$= (X_1 + ... + X_n)(X_1^{+} ... X_n^3) - (X_1^4 + ... + X_n^4).$$

Observăm că f *este polinom simetric în* $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_n]$. f *este polinom omogen de grad 4.*

Termenul principal este $tp(f) = X_1^3X_2$.

Fie $f_1 = f - s_1^2 s_2$.

Ştim că f_1 *este de asemenea simetric, omogen de grad 4 şi* $tp(f_1) < tp(f)$.

Deci $tp(f_1) = aX_1^2X_2^2$, *unde* $a \in \mathbb{Q}$, *coeficient nedeterminat.*

Fie $f_2 = f_1 - as_2^2$.

Atunci f_2 *este polinom simetric, omogen de grad 4 şi* $tp(f_2) < tp(f_1)$.

Deci $tp(f_2) = bX_1^2X_2X_3$.

Fie $f_3 = f_2 - bs_1s_3$.

Atunci f_3 *este polinom simetric, omogen de grad 4 şi* $tp(f_3) < tp(f_2)$.

Deci $tp(f_3) = cX_1X_2X_3X_4$.

Fie $f_4 = f_3 - cs_4$.

Atunci f_4 *este polinom simetric omogen de grad 4 şi* $tp(f_4) < tp(f_3)$, $tp(f_4)$ *nu se mai poate construi, deci* $f_4 = 0$.

Adunând expresiile membru cu membru, obţinem

$$f = s_1^2 s_2 + as_2^2 + bs_1s_3 + cs_4,$$

unde $a, b, c \in \mathbb{Q}$ *sunt coeficienţi nedeterminaţi.*

Construim următorul tabel cu datele obţinute, şi dăm valori necunoscutei, pentru a afla coeficienţii a, b, c.

X_1	X_2	X_3	X_4	$...X_n$	$E(s_1)$	$E(s_2)$	$E(s_3)$	$E(s_4)$	$E(f)_1$	$E(f)_2$
1	1	1	0	0	3	3	1	0	6	27+9a+3b
1	1	0	0	0	2	1	0	0	2	4+a
3	-1	-1	-1	0	0	-6	8	-3	-84	72-3c

În urma acestui tabel găsim $a = -2,\ b = -1,\ c = 4$.

În concluzie, polinomul căutat, f *este*

$$f = s_1^2 s_2 - 2s_2^2 - s_1s_3 + 4s_4.$$

Aplicaţia 3. *Fie* $f = (X_1^2 + X_1^3 + X_1^4) + (X_2^2 + X_2^3 + X_2^4) + (X_3^2 + X_3^3 + X_3^4) + (X_4^2 + X_4^3 + X_4^4)$. *Să se exprime* f *în funcţie de polinoamele simetrice fundamentale.*

Scriem f *sub forma* $f = f_1 + f_2 + f_3$, *unde*
$f_1 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$;
$f_2 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3$;
$f_3 = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4$,
polinoame simetrice omogene de grad $2, 3$ *respectiv* 4 *în* $\mathbb{Q}[X_1, ..., X_4]$.

- $f_1 = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$.
  Termenul principal este $tp(f_1) = X_1^2$.
  Fie $f_{11} = f_1 - s_1^2$.
  Polinomul f_{11} *este polinom simetric, omogen de grad 2 şi* $tp(f_{11}) < tp(f_1)$.
  Fie $f_{12} = f_{11} - as_2$, *polinom simetric, omogen de grad 2.*
  Termenul principal $tp(f_{12})$ *nu se poate construi, deci* $f_{12} = 0$.
  Adunând expresiile obţinem

  $$f_1 = s_1^2 + as_2$$

  , *unde* $a \in \mathbb{Q}$. *Construim următorul tabel, de unde obţinem* $a = -2$, *deci* $f_1 = s_1^2 - 2s_2$.

X_1	X_2	X_3	X_4	$E(s_1)$	$E(s_2)$	$E(f)_1$	$E(f)_2$
1	*1*	*1*	*0*	*3*	*3*	*3*	*9+3a*

- $f_2 = X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 + X_4^3$.
  Termenul principal este $tp(f_2) = X_1^3$.
  Fie $f_{21} = f_2 - s_1^3$.
  Polinomul f_{21} *este polinom simetric, omogen de grad 3 şi* $tp(f_{21}) < tp(f_2)$,
  $tp(f_{21}) = aX_1^2X_2, a \in \mathbb{Q}$.
  Fie $f_{22} = f_{21} - as_1s_2$, *polinom simetric, omogen de grad 3.*
  Deci $tp(f_22) = bX_1X_2X_3, b \in \mathbb{Q}$.
  Fie $f_{23} = f_{22} - bs_3$, *polinom simetric, omogen de grad 3.*
  Termenul principal $tp(f_{23})$ *nu se poate construi, deci* $f_{23} = 0$.
  Adunând expresiile obţinem

  $$f_2 = s_1^3 + as_1s_2 + bs_3$$

  , *unde* $a, b \in \mathbb{Q}$.
  Construim următorul tabel, de unde obţinem $a = -9, b = 3$, *deci* $f_2 = s_1^3 - 9s_1s_2 + 3s_3$.

X_1	X_2	X_3	X_4	$E(s_1)$	$E(s_2)$	$E(s_3)$	$E(f)_1$	$E(f)_2$
1	*1*	*1*	*0*	*3*	*3*	*1*	*3*	*27+3a+b*
2	*-1*	*-1*	*0*	*0*	*-3*	*2*	*6*	*2b*

- $f_3 = X_1^4 + X_2^4 + X_3^4 + X_4^4$.
  Termenul principal este $tp(f_3) = X_1^4$.
  Fie $f_{31} = f_3 - s_1^4$.
  Polinomul f_{31} *este polinom simetric, omogen de grad 4 şi* $tp(f_{31}) < tp(f_3)$,
  $tp(f_{31}) = aX_1^3X_2, a \in \mathbb{Q}$.
  Fie $f_{32} = f_{31} - as_1^2s_2$, *polinom simetric, omogen de grad 4.*
  Deci $tp(f_{32}) = bX_1^2X_2^2, b \in \mathbb{Q}$.
  Fie $f_{33} = f_{32} - bs_2^2$, *polinom simetric, omogen de grad 4.*
  Deci $tp(f_{33}) = cX_1^2X_2X_3, c \in \mathbb{Q}$.
  Fie $f_{34} = f_{34} - cs_1s_3$, *polinom simetric, omogen de grad 4.*
  Deci $tp(f_{34}) = dX_1X_2X_3X_4, d \in \mathbb{Q}$.
  Fie $f_{35} = f_{34} - ds_4$, *polinom simetric, omogen de grad 4.*
  Termenul principal $tp(f_{35})$ *nu se poate construi, deci* $f_{35} = 0$.
  Adunând expresiile obţinem

$$f_3 = s_1^4 + as_1^2s_2 + bs_2^2 + cs_1s_3 + ds_4$$

, *unde* $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Construim următorul tabel, de unde obţinem $a = -\frac{7}{2}$, $b = 0$, $c = \frac{11}{2}$, $d = -4$, *deci* $f_3 = s_1^4 - \frac{7}{2}s_1^2s_2 + \frac{11}{2}s_1s_3 - 4s_4$.

X_1	X_2	X_3	X_4	$E(s_1)$	$E(s_2)$	$E(s_3)$	$E(s_4)$	$E(f)_1$	$E(f)_2$
1	1	1	0	3	3	1	0	3	81+27a+9b+3c
2	-1	-1	0	0	-3	2	0	0	9b
1	1	1	1	4	6	4	1	4	256+96a+16c+d
0	0	1	1	2	1	0	0	2	18+4a

În concluzie polinomul căutat f *este*

$$f = f_1 + f_2 + f_3 = s_1^4 + s_1^3 + s_1^2 - \frac{7}{2}s_1^2s_2 - 9s_1s_2 + \frac{11}{2}s_1s_3 - 2s_2 + 3s_3 - 4s_4.$$

Aplicaţia 4. *Fie* $f = \frac{X_1}{X_2} + \frac{X_2}{X_1} + \frac{X_2}{X_3} + \frac{X_3}{X_2} + \frac{X_3}{X_1} + \frac{X_1}{X_3}$. *Să se exprime* f *în funcţie de polinoamele simetrice fundamentale.*

Observăm că, dacă aducem la acelaşi numitor, obţinem

$$f = \frac{X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_2X_3^2 + X_1^2X_2}{X_1X_2X_3}.$$

Notăm $f = \frac{g}{h}$, *unde*

$$g = X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_2X_3^2 + X_1^2X_2$$

, *si*

$$h = X_1X_2X_3.$$

Pe g îl putem scrie astfel

$$g = X_1^2X_3 + X_2^2X_3 + X_1X_2^2 + X_1X_3^2 + X_2X_3^2 + X_1^2X_2 + 3X_1X_2X_3 - 2X_1X_2X_3 =$$
$$= X_1X_2(X_1+X_2+X_3) + X_1X_3(X_1+X_2+X_3) + X_2X_3(X_1+X_2+X_3) - 3X_1X_2X_3 =$$
$$= (X_1X_2 + X_1X_3 + X_2X_3)(X_1 + X_2 + X_3) - 3X_1X_2X_3$$

Folosind polinoamele simetrice fundamentale obţinem

$$g = s_2s_1 - 3s_3$$

Observăm că $h = s_3$, *deci*

$$f = \frac{s_1s_2 - 3s_3}{s_3} = \frac{s_1s_2}{s_3} - 3.$$

BIBLIOGRAFIE

[1] Năstăsescu, C., Niţă, C., Teoria calitativă a ecuaţiilor algebrice, Editura Tehnica, Bucureşti, 1979
[2] Pelea, C., Purdea I., Probleme de algebră, Editura Eikon, 2008
[3] Pop, I., Purdea, I., Algebră, Editura Gil, Zalău, 2003

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: coman_cristina_aida@yahoo.com

Primit la redacţie: 25 Mai 2015