DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 87–100

DERIVABILITATEA DE ORDINUL DOI A FUNCŢIEI PUNCT INTERMEDIAR DIN TEOREMA DE MEDIE A LUI CAUCHY

Beatrix-Mihaela Pop şi Dorel I. Duca

Abstract. If the functions $f, g : I \to \mathbb{R}$ are differentiable on the interval $I \subseteq \mathbb{R}$, then for each $x, a \in I$ there exists a real number $\theta \in]0, 1[$ such that

$$(f(x) - f(a))\, g^{(1)}(a + \theta(x - a)) = (g(x) - g(a))\, f^{(1)}(a + \theta(x - a)).$$

In this paper we study the behaviour of the number $\theta \in]0, 1[$, when x approaches a.

MSC 2000. 26A24

Key words. Cauchy's theorem, intermediate point, mean-value theorem

1. TEOREMA DE MEDIE A LUI CAUCHY

Teorema de medie a lui Cauchy este una din teoremele fundamentale ale analizei matematice. Este prezentată de obicei în următoarea formă (vezi, de exemplu, [1]):

Teorema 1. (*teorema de medie a lui Cauchy, a doua teoremă de medie a calculului diferenţial*) *Fie a şi b numere reale cu $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*

(i) *funcţiile f şi g sunt continue pe $[a, b]$,*

(ii) *funcţiile f şi g sunt derivabile pe $]a, b[$,*

atunci există cel puţin un punct $c \in]a, b[$ astfel încât:

$$[f(b) - f(a)]g^{(1)}(c) = [g(b) - g(a)]f^{(1)}(c). \tag{1}$$

Dacă, în plus,

(iii) *$g^{(1)}(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in]a, b[$,*

atunci

$$g(b) \neq g(a)$$

şi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(c)}{g^{(1)}(c)}.\ \triangledown \tag{2}$$

Egalitatea (1) poartă numele de "*a doua formulă a creşterilor finite*" sau "*a doua formulă de medie a calculului diferen*ţial".

Exemplul 1. *Pentru funcţiile f, $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definite prin*

$$f(x) = x^2,\ g(x) = x,\ \textit{oricare ar fi } x \in [-1, 1],$$

există un singur punct $c \in]-1,1[$ *şi anume* $c = 0$ *astfel încât* (*1*) *este adevărată.* $\triangledown$

EXEMPLUL 2. *Pentru funcţiile* $f,\ g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *definite prin*

$$f(x) = x^3,\ g(x) = x,\ \textit{oricare ar fi } x \in [-1,1],$$

există două puncte $c_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ *şi* $c_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ *astfel încât* (1) *este adevărată.* $\triangledown$

EXEMPLUL 3. *Dacă* n *este un număr natural, atunci pentru funcţiile* f, $g : [-n\pi, n\pi] \to \mathbb{R}$, *definite prin*

$$f(x) = \cos x,\ g(x) = \exp x,\ \textit{oricare ar fi } x \in [-n\pi, n\pi],$$

există $2n - 1$ *puncte* $c \in]-n\pi, n\pi[$ *şi anume*

$$c_k = k\pi,\ k \in]-n, n[\cap \mathbb{Z},$$

astfel încât (*1*) *este adevărată.* $\triangledown$

Are loc următoarea teoremă de unicitate a punctului intermediar c.

TEOREMA 2. (*teorema de unicitate a punctului intermediar*) *Fie* a *şi* b *numere reale cu* $a < b$ *şi* $f,\ g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funcţii care satisfac următoarele condiţii:*
(*i*) *funcţiile* f *şi* g *sunt continue pe* $[a,b]$,
(*ii*) *funcţiile* f *şi* g *sunt derivabile pe* $]a,b[$,
(*iii*) $g^{(1)}(x) \neq 0$, *oricare ar fi* $x \in]a,b[$.
Dacă funcţia $f^{(1)}/g^{(1)}$ *este injectivă pe* $]a,b[$, *atunci există un punct* $c \in]a,b[$, *şi unul singur, astfel încât* (*2*) *este adevărată.*$\triangledown$

Demonstraţie. Vezi, de exemplu, [1] $\square$

Prin urmare, dacă funcţiile $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ satisfac ipotezele teoremei lui Cauchy, atunci există cel puţin un punct $c \in]a,b[$ astfel încât să avem (2). Urmează că notând cu θ raportul

$$\theta := \frac{c-a}{b-a},$$

obţinem că

$$\theta \in]0,1[, \quad c = a + (b-a)\theta$$

şi deci

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(a + (b-a)\theta)}{g^{(1)}(a + (b-a)\theta)}.$$

Deducem că teorema lui Cauchy poate fi formulată şi în modul următor:

TEOREMA 3. (*teorema de medie a lui Cauchy*) *Fie a şi b numere reale cu $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$. Dacă:*
(*i*) *funcţiile f şi g sunt continue pe $[a, b]$,*
(*ii*) *funcţiile f şi g sunt derivabile pe $]a, b[$,*
atunci există cel puţin un număr real $\theta \in]0, 1[$ astfel încât:

$$[f(b) - f(a)]g^{(1)}(a + (b - a)\theta) = [g(b) - g(a)]f^{(1)}(a + (b - a)\theta).$$

Dacă, în plus,
(*iii*) $g^{(1)}(x) \neq 0$ *oricare ar fi $x \in]a, b[$,*
atunci

$$g(b) \neq g(a)$$

şi

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(a + (b - a)\theta)}{g^{(1)}(a + (b - a)\theta)}. \quad \triangledown \tag{3}$$

EXEMPLUL 4. *Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a < b$. Pentru funcţiile f, g definite prin*

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x, \text{ oricare ar fi } x \in [a, b],$$

există un singur număr real $\theta \in]0, 1[$, şi anume $\theta = 1/2$, astfel încât egalitatea (*3*) *să fie adevărată.* $\triangledown$

EXEMPLUL 5. *Pentru funcţiile $f, g : [1, 2] \to \mathbb{R}$ definite prin*

$$f(x) = x, \quad g(x) = \exp x, \text{ oricare ar fi } x \in [1, 2],$$

există un singur număr real $\theta \in]0, 1[$, şi anume $\theta = \ln(e - 1)$, astfel încât egalitatea (*3*) *să aibă loc.* $\triangledown$

TEOREMA 4. (*teorema de unicitate a punctului intermediar*) *Fie a şi b numere reale cu $a < b$ şi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funcţii care satisfac următoarele condiţii:*
(*i*) *funcţiile f şi g sunt continue pe $[a, b]$,*
(*ii*) *funcţiile f şi g sunt derivabile pe $]a, b[$,*
(*iii*) $g^{(1)}(x) \neq 0$, *oricare ar fi $x \in]a, b[$.*
Dacă funcţia $f^{(1)}/g^{(1)}$ este injectivă pe $]a, b[$, atunci există un număr real $\theta \in]0, 1[$, şi unul singur, astfel încât (*3*) *să fie adevărată.*

Demonstraţie. Demonstraţia este imediată. □

2. FUNCŢIA PUNCT INTERMEDIAR

Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval, $a \in I$ şi $f, g : I \to \mathbb{R}$ funcţii derivabile pe I astfel încât $g^{(1)}(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I\backslash\{a\}$.

Atunci din teorema 1, pentru fiecare $x \in I\backslash\{a\}$ există cel puţin un punct c_x, în intervalul cu extremităţile x şi a, astfel încât

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f^{(1)}(c_x)}{g^{(1)}(c_x)}. \tag{4}$$

Având în vedere teorema 2, dacă $f^{(1)}/g^{(1)}$ este injectivă pe I, atunci pentru fiecare $x \in I\backslash\{a\}$ există un singur punct c_x, în intervalul cu extremităţile x şi a, astfel încât (4) este verificată. În acest caz putem defini funcţia $c : I\backslash\{a\} \to I\backslash\{a\}$ prin:

$$c(x) = c_x, \text{ oricare ar fi } x \in I\backslash\{a\}. \tag{5}$$

Funcţia c are proprietatea că

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f^{(1)}(c(x))}{g^{(1)}(c(x))}, \text{ oricare ar fi } x \in I\backslash\{a\}. \tag{6}$$

Dacă $f^{(1)}/g^{(1)}$ nu este injectivă, atunci există puncte $x \in I\backslash\{a\}$, pentru care există mai multe puncte c_x, în intervalul cu extremităţile x şi a, astfel încât (4) este verificată. Dacă pentru fiecare $x \in I\backslash\{a\}$ alegem un punct c_x, în intervalul cu extremităţile x şi a, care îndeplineşte (4), atunci putem, de asemenea, să definim funcţia $c : I\backslash\{a\} \to I\backslash\{a\}$ prin formula (5). Această funcţie c verifică de asemenea (6).

În consecinţă următoarea afirmaţie este adevărată.

Teorema 5. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, a un punct din I şi $f, g : I \to \mathbb{R}$. Dacă funcţiile f şi g sunt derivabile pe I şi $g^{(1)}(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I\backslash\{a\}$, atunci există cel puţin o funcţie $c : I\backslash\{a\} \to I\backslash\{a\}$ astfel încât (6) este adevărată.*

Dacă, în plus, funcţia $f^{(1)}/g^{(1)}$ este injectivă, atunci funcţia c este unică. $\triangledown$

Dacă $x \in I\backslash\{a\}$ tinde către a, deoarece

$$|c(x) - a| \leq |x - a|,$$

deducem că există limita funcţiei c în punctul a şi

$$\lim_{x \to a} c(x) = a.$$

Atunci funcţia $\overline{c} : I \to I$ definită prin

(7) $$\overline{c}(x)=\begin{cases} c(x), & \text{dacă } x\in I\backslash\{a\} \\ a, & \text{dacă } x=a, \end{cases}$$

este continuă în punctul $x=a$.

Unul din scopurile acestei lucrări este de a stabili în ce condiţii funcţia $\overline{c}$ este derivabilă (de ordinul întâi şi superior) în punctul $x=a$. Depind derivatele funcţiei $\overline{c}$ în punctul $x=a$ de funcţiile f şi g? Dacă există mai multe funcţii $\overline{c}$ care satisfac relaţia (6), atunci derivatele funcţiei $\overline{c}$ în punctul $x=a$ depind de funcţia $\overline{c}$ aleasă?

Exemplul 6. *Fie $a=0$ şi $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţiile definite prin*

$$f(x)=x^2,\quad g(x)=x,\ \textit{oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă imediat că funcţia $\overline{c}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin formula

$$\overline{c}(x)=x/2,\ \textit{oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

Evident funcţia $\overline{c}$ este derivabilă în punctul $x=0$ şi

$$\overline{c}^{(1)}(0)=1/2.\triangledown$$

Exemplul 7. *Fie $a=0$ şi $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funcţiile definite prin*

$$f(x)=x,\quad g(x)=\exp x,\ \textit{oricare ar fi } x\in\mathbb{R}.$$

Rezultă imediat că funcţia $\overline{c}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este definită prin formula

$$\overline{c}(x)=\begin{cases} \ln\frac{\exp x-1}{x}, & \textit{dacă } x\in\mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0, & \textit{dacă } x=0. \end{cases}$$

Mai mult, funcţia $\overline{c}$ este derivabilă în punctul $x=0$ şi

$$\overline{c}^{(1)}(0)=1/2.\triangledown$$

Pentru a calcula derivata funcţiei $\overline{c}$ în punctul $x=a$ avem nevoie de raportul

$$\frac{\overline{c}(x)-\overline{c}(a)}{x-a}=\frac{c(x)-a}{x-a},$$

pentru fiecare $x\in I\backslash\{a\}$.

Urmează că dacă notăm cu

(8) $$\theta(x)=\frac{c(x)-a}{x-a},\ \text{oricare ar fi } x\in I\backslash\{a\},$$

atunci funcţia $\overline{c}:I\to I$ este derivabilă în punctul $x=a$ dacă şi numai dacă funcţia $\theta:I\backslash\{a\}\to]0,1[$ definită prin formula (8) are limită finită în punctul

$x = a$; mai mult, derivata funcţiei $\overline{c}$ în punctul $x = a$, adică $\overline{c}^{(1)}(a)$, este egală cu

$$\overline{c}^{(1)}(a) = \lim_{x\to a} \theta(x) = \lim_{x\to a} \frac{c(x) - a}{x - a}.$$

Evident funcţia θ are proprietatea că

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(a + (x - a)\theta(x))}{g^{(1)}(a + (x - a)\theta(x))}, \text{ oricare ar fi } x \in I\backslash\{a\}. \tag{9}$$

În consecinţă, următoarea afirmaţie este adevărată.

Teorema 6. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, a un punct din I şi f, $g : I \to \mathbb{R}$. Dacă funcţiile f şi g sunt derivabile pe I şi $g^{(1)}(x) \neq 0$, oricare ar fi $x \in I\backslash\{a\}$, atunci există o funcţie $\theta : I\backslash\{a\} \to]0, 1[$ cu proprietatea că (9) are loc.*

Dacă, în plus, funcţia $f^{(1)}/g^{(1)}$ este injectivă, atunci funcţia θ este unică. $\triangledown$

În lucrarea [3], se demonstrează următoarea teoremă.

Teorema 7. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, a un punct din I şi f, $g : I \to \mathbb{R}$ funcţii care satisfac condiţiile:*

(*a*) *funcţiile f şi g sunt derivabile de $n \geq 3$ ori pe I,*
(*b*) *funcţiile $f^{(n)}$ şi $g^{(n)}$ sunt continue în punctul a,*
(*c*) $f^{(1)}(a)g^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)g^{(1)}(a)$, *oricare ar fi $k \in \{2, ..., n - 1\}$,*
(*d*) $f^{(1)}(a)\ g^{(n)}(a) \neq f^{(n)}(a)\ g^{(1)}(a)$.

1^0 *Dacă $\theta : I\backslash\{a\} \to]0, 1[$ este o funcţie care satisface egalitatea*

$$\begin{aligned}(f(x) - f(a))g^{(1)}(a + (x - a)\theta(x)) = \\ = (g(x) - g(a))f^{(1)}(a + (x - a)\theta(x)),\end{aligned} \tag{10}$$

oricare ar fi $x \in I\backslash\{a\}$, atunci funcţia θ are limită în punctul $x = a$ şi

$$\lim_{x\to a} \theta(x) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}. \tag{11}$$

2^0 *Dacă $c : I\backslash\{a\} \to \mathbb{R}$ este o funcţie care satisface egalitatea*

$$(f(x) - f(a))g^{(1)}(c(x)) = (g(x) - g(a))f^{(1)}(c(x)),$$

oricare ar fi $x \in I\backslash\{a\}$, atunci funcţia $\overline{c} : I \to I$ definită prin

$$\overline{c}(x) = \begin{cases} c(x), & \text{dacă } x \in I\backslash\{a\} \\ a, & \text{dacă } x = a, \end{cases}$$

este derivabilă în punctul $x = a$ şi

$$\overline{c}^{(1)}(a) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{n}}.$$

În această lucrare sunt date condiţii suficiente pentru ca funcţia punct intermediar $\overline{c}$ să fie derivabilă de două ori în punctul $x = a$, precum şi condiţii suficiente pentru ca funcţia $\overline{\theta} : I \to [0,1]$ - prelungirea prin continuitate a funcţiei $\theta : I \backslash \{a\} \to]0,1[$ - să fie derivabilă în punctul $x = a$.

3. PROPRIETĂŢI DE DERIVABILITATE ALE FUNCŢIEI PUNCT INTERMEDIAR

În acest paragraf vom studia funcţiile c şi θ definite mai sus. Vom da condiţii suficiente pentru ca funcţia $\overline{c}$ să fie derivabilă punctul $x = a$. Un prim rezultat este conţinut în teorema următoare.

Teorema 8. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, a un punct interior intervalului I şi f, $g : I \to \mathbb{R}$ funcţii care îndeplinesc condiţiile:*
(a) *funcţiile f şi g sunt derivabile de două ori pe I;*
(b) *funcţiile $f^{(2)}$ şi $g^{(2)}$ sunt continue în punctul $x = a$;*
(c) $g^{(1)}(x) \neq 0$, *oricare ar fi x din interiorul,* int I, *al intervalului I;*
(d) $f^{(1)}(a)\, g^{(2)}(a) \neq f^{(2)}(a)\, g^{(1)}(a)$.
Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:
1^0 *Există un număr real $\delta > 0$ astfel încât:*
i) $]a - \delta, a + \delta[\subseteq I$;
ii) $f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) \neq f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)$, *oricare ar fi $x \in]a - \delta, a + \delta[$;*
iii) $f^{(1)}/g^{(1)}$ *este injectivă pe $]a - \delta, a + \delta[$.*
2^0 *Există o funcţie $c :]a - \delta, a + \delta[\backslash\{a\} \to]a - \delta, a + \delta[\backslash\{a\}$, şi una singură, astfel încât*

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(c(x))}{g^{(1)}(c(x))}, \tag{12}$$

oricare ar fi $x \in]a - \delta, a + \delta[\backslash\{a\}$.
3^0 *Există o funcţie $\theta :]a - \delta, a + \delta[\backslash\{a\} \to]0, 1[$, şi una singură, astfel încât*

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(a + (x - a)\theta(x))}{g^{(1)}(a + (x - a)\theta(x))}, \tag{13}$$

oricare ar fi $x \in I\backslash\{a\}$.
4^0 *Funcţia θ are limită în punctul $x = a$ şi*

$$\lim_{x\to a} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

5^0 *Funcţia $\overline{c} :]a - \delta, a + \delta[\to]a - \delta, a + \delta[$ definită prin*

$$\overline{c}\left(x\right)=\begin{cases} c\left(x\right), & \textit{dacă } x\in]a-\delta,a+\delta[\setminus\{a\}\\ a, & \textit{dacă } x=a,\end{cases}$$

este derivabilă în punctul $x=a$ şi

$$\overline{c}^{(1)}\left(a\right)=\frac{1}{2}.$$

Demonstraţie. 1^0 Presupunem că $f^{(1)}(a)g^{(2)}(a)<f^{(2)}(a)g^{(1)}(a)$. Din ipoteza (b) şi $a\in\operatorname{int} I$, rezultă că există un număr real $\delta>0$ astfel încât $]a-\delta,a+\delta[\subseteq I$ şi

$$f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)<f^{(2)}(x)g^{(1)}(x),\ \text{oricare ar fi } x\in]a-\delta,a+\delta[.$$

Urmează că

$$\left(\frac{f^{(1)}}{g^{(1)}}\right)^{(1)}(x)=\frac{f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)-f^{(1)}(x)g^{(2)}(x)}{\left(g^{(1)}(x)\right)^2}>0,$$

oricare ar fi $x\in]a-\delta,a+\delta[$, şi deci $f^{(1)}/g^{(1)}$ este strict crescătoare pe $]a-\delta,a+\delta[$. În consecinţă, funcţia $f^{(1)}/g^{(1)}$ este injectivă pe $]a-\delta,a+\delta[$.

Dacă $f^{(1)}(a)g^{(2)}(a)>f^{(2)}(a)g^{(1)}(a)$, demonstraţia este similară.

2^0 Afirmaţia 2^0 urmează din teorema 5

3^0 Afirmaţia 3^0 urmează din teorema 6

4^0 În baza formulei lui Taylor, pentru fiecare $x\in]a-\delta,a+\delta[\setminus\{a\}$, există două numere reale $\widehat{\theta}_f\left(x\right),\widehat{\theta}_g\left(x\right)\in]0,1[$ astfel încât

$$f(x)=f(a)+f^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2}f^{(2)}(A_f\left(x\right))(x-a)^2 \tag{14}$$

şi

$$g(x)=g(a)+g^{(1)}(a)(x-a)+\frac{1}{2}g^{(2)}(A_g\left(x\right))(x-a)^2, \tag{15}$$

unde

$$A_f\left(x\right):=a+(x-a)\widehat{\theta}_f(x)\ \text{ şi }\ A_g\left(x\right):=a+(x-a)\widehat{\theta}_g(x).$$

În baza teoremei de medie a lui Lagrange, aplicată funcţiilor $f^{(1)}$ şi $g^{(1)}$, pentru fiecare $x\in]a-\delta,a+\delta[\setminus\{a\}$ există două numere reale $\widetilde{\theta}_f\left(x\right),\widetilde{\theta}_g\left(x\right)\in]0,1[$ astfel încât

$$f^{(1)}(c(x))=f^{(1)}(a+(x-a)\theta(x))=f^{(1)}(a)+f^{(2)}(B_f\left(x\right))(x-a)\theta(x) \tag{16}$$

şi

$$g^{(1)}(c(x))=g^{(1)}(a+(x-a)\theta(x))=g^{(1)}(a)+g^{(2)}(B_g\left(x\right))(x-a)\theta(x), \tag{17}$$

unde

$$B_f\,(x) := a + (x-a)\theta(x)\widetilde{\theta}_f(x) \ \text{ şi } \ B_g\,(x) := a + (x-a)\theta(x)\widetilde{\theta}_g(x).$$

Înlocuind (14)-(17) în (12), obţinem că, pentru fiecare $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, avem

$$\frac{f^{(1)}(a) + \frac{1}{2}f^{(2)}(A_f\,(x))(x-a)}{g^{(1)}(a) + \frac{1}{2}g^{(2)}(A_g\,(x))(x-a)} = \frac{f^{(1)}(a) + f^{(2)}(B_f\,(x))(x-a)\theta(x)}{g^{(1)}(a) + g^{(2)}(B_g\,(x))(x-a)\theta(x)},$$

sau echivalent,

$$\theta(x)\left\{f^{(1)}(a)g^{(2)}(B_g\,(x)) - f^{(2)}(B_f\,(x))g^{(1)}(a)\right\} + \tag{18}$$

$$+\frac{1}{2}[f^{(2)}(A_f\,(x))g^{(2)}(B_g\,(x)) - f^{(2)}(B_f\,(x))g^{(2)}(A_g\,(x))](x-a) =$$

$$= \frac{1}{2}[f^{(1)}(a)g^{(2)}(A_g\,(x))) - f^{(2)}(A_f\,(x))g^{(1)}(a)].$$

Întrucât pentru fiecare $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, avem că numerele $\theta(x)$, $\widetilde{\theta}_f(x)$, $\widetilde{\theta}_g(x)$, $\widehat{\theta}_f(x)$, $\widehat{\theta}_g(x)$ aparţin intervalului $]0,1[$, deducem că:

$$\left|(x-a)\widehat{\theta}_f(x)\right| \le |x-a| \quad \text{şi} \quad \left|(x-a)\theta(x)\widetilde{\theta}_f(x)\right| \le |x-a|\,,$$

$$\left|(x-a)\widehat{\theta}_g(x)\right| \le |x-a| \quad \text{şi} \quad \left|(x-a)\theta(x)\widetilde{\theta}_g(x)\right| \le |x-a|\,,$$

oricare ar fi $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$. Funcţiile $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, $g^{(1)}$, $g^{(2)}$ fiind continue în punctul $x = a$, din (18) rezultă că există limita funcţiei θ în punctul $x = a$ şi

$$\lim_{x\to a} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

5^0 Avem

$$\overline{c}^{(1)}\,(a) = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{\overline{c}\,(x) - \overline{c}\,(a)}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \frac{c\,(x) - a}{x-a} = \lim_{x\longrightarrow a} \theta(x).$$

Teorema este demonstrată. □

Dacă punctul a este extremitate a intervalului I, atunci are loc următoara variantă a teoremei 8.

TEOREMA 9. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, $a \in I$ extremitatea stângă a intervalului I şi f, $g : I \to \mathbb{R}$ două funcţii care îndeplinesc condiţiile:*
(*a*) *funcţiile f şi g sunt derivabile de două ori pe I;*
(*b*) *funcţiile $f^{(2)}$ şi $g^{(2)}$ sunt continue în punctul $x = a$;*
(*c*) *$g^{(1)}(x) \neq 0$, oricare ar fi x din interiorul intervalului I;*
(*d*) *$f^{(1)}(a)\, g^{(2)}(a) \neq f^{(2)}(a)\, g^{(1)}(a)$.*
Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:
1^0 *Există un număr real $\delta > 0$ astfel încât:*
i) $[a, a+\delta[\subseteq I$,
ii) $f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) \neq f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)$, *oricare ar fi* $x \in [a, a+\delta[$,
iii) $f^{(1)}/g^{(1)}$ *este injectivă pe* $[a, a+\delta[$.
2^0 *Există o funcţie $c :]a, a+\delta[\to]a, a+\delta[$, şi una singură, astfel încât*

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f^{(1)}(c(x))}{g^{(1)}(c(x))},$$

oricare ar fi $x \in]a, a+\delta[$.
3^0 *Există o funcţie $\theta :]a, a+\delta[\to]0, 1[$, şi una singură, astfel încât*

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f^{(1)}(a+(x-a)\theta(x))}{g^{(1)}(a+(x-a)\theta(x))},$$

oricare ar fi $x \in]a, a+\delta[$.
4^0 *Funcţia θ are limită la dreapta în punctul $x = a$ şi:*

$$\lim_{x \searrow a} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

5^0 *Funcţia $\overline{c} : [a, a+\delta[\to \mathbb{R}$ definită prin*

$$\overline{c}(x) = \begin{cases} c(x), & \text{dacă } x \in]a, a+\delta[\\ a, & \text{dacă } x = a \end{cases}$$

este derivabilă în punctul $x = a$ şi

$$\overline{c}^{(1)}(a) = \frac{1}{2}.$$

Demonstraţie. Demonstraţia este similară cu a teoremei 8. □

O teoremă asemănătoare se poate da şi dacă a este extremitatea dreaptă a intervalului I.

Nu se cunosc rezultate relative la derivabilitatea de ordin superior a funcţiei punct intermediar $\overline{c}$ şi nici rezultate relative la derivabilitatea, de ordinul întâi şi superior, ale funcţiei $\overline{\theta}$ - prelungirea prin continuitate a funcţiei θ

În cele ce urmează vom da condiţii suficiente pentru ca funcţia $\overline{c}$ să fie derivabilă de două ori în punctul $x = a$, funcţia $\overline{\theta}$ să fie derivabilă în punctul $x = a$ şi vom calcula $\overline{c}^{(2)}(a)$ şi $\overline{\theta}^{(1)}(a)$.

Are loc următoarea teoremă.

Teorema 10. *Fie I un interval din $\mathbb{R}$, a un punct interior intervalului I şi f, $g : I \to \mathbb{R}$ funcţii care îndeplinesc condiţiile:*

(a) *funcţiile f şi g sunt derivabile de trei ori pe I,*
(b) *funcţiile $f^{(3)}$ şi $g^{(3)}$ sunt continue în punctul $x = a$,*
(c) $g^{(1)}(x) \neq 0$, *oricare ar fi x din interiorul,* int I, *al intervalului I,*
(d) $f^{(1)}(a)\, g^{(2)}(a) \neq f^{(2)}(a)\, g^{(1)}(a)$.

Atunci următoarele afirmaţii sunt adevărate:

1^0 *Există un număr real $\delta > 0$ astfel încât:*
i) $]a - \delta, a + \delta[\subseteq I$;
ii) $f^{(1)}(x)g^{(2)}(x) \neq f^{(2)}(x)g^{(1)}(x)$, *oricare ar fi $x \in]a - \delta, a + \delta[$;*
iii) $f^{(1)}/g^{(1)}$ *este injectivă pe $]a - \delta, a + \delta[$.*

2^0 *Există o funcţie $c :]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\} \to]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\}$, şi una singură, astfel încât*

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(c(x))}{g^{(1)}(c(x))}, \tag{19}$$

oricare ar fi $x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\}$.

3^0 *Există o funcţie $\theta :]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\} \to]0, 1[$, şi una singură, astfel încât*

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f^{(1)}(a + (x - a)\theta(x))}{g^{(1)}(a + (x - a)\theta(x))}, \tag{20}$$

oricare ar fi $x \in I\setminus\{a\}$.

4^0 *Funcţia θ are limită în punctul $x = a$ şi*

$$\lim_{x\to a} \theta(x) = \frac{1}{2}.$$

5^0 *Funcţia $\overline{\theta} :]a - \delta, a + \delta[\to]0, 1[$ definită prin*

$$\overline{\theta}(x) = \begin{cases} \theta(x), & \text{dacă } x \in]a - \delta, a + \delta[\setminus\{a\} \\ 1/2, & \text{dacă } x = a, \end{cases}$$

este derivabilă în punctul $x = a$ şi

$$\overline{\theta}^{(1)}(a) = \frac{f^{(1)}(a)\, g^{(3)}(a) - f^{(3)}(a)\, g^{(1)}(a)}{24\left[f^{(1)}(a)\, g^{(2)}(a) - f^{(2)}(a)\, g^{(1)}(a)\right]}.$$

6^0 *Funcţia $\overline{c} :]a - \delta, a + \delta[\to]a - \delta, a + \delta[$ definită prin*

$$\overline{c}\,(x) = \begin{cases} c\,(x)\,, & dac\breve{a}\ x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\} \\ a, & dac\breve{a}\ x = a, \end{cases}$$

este derivabilă de două ori în punctul $x = a$ *şi*

$$\overline{c}^{(1)}\,(a) = \frac{1}{2}, \quad c^{(2)}\,(a) = \frac{f^{(1)}\,(a)\,g^{(3)}\,(a) - f^{(3)}\,(a)\,g^{(1)}\,(a)}{12\left[f^{(1)}\,(a)\,g^{(2)}\,(a) - f^{(2)}\,(a)\,g^{(1)}\,(a)\right]}.$$

Demonstraţie. Teorema 8 ne asigură că afirmaţiile $1^0 - 4^0$ sunt adevărate. Pe de altă parte, în baza teoremei lui Taylor, pentru fiecare $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$, există $\widehat{\theta}_f\,(x)\,, \widehat{\theta}_g\,(x)\,, \widetilde{\theta}_f\,(x)\,, \widetilde{\theta}_g\,(x) \in]0,1[$ astfel încât dacă notăm cu

$$A_f\,(x) := a + (x-a)\,\widehat{\theta}_f\,(x)\,, \qquad A_g := a + (x-a)\,\widehat{\theta}_g\,(x)\,,$$

$$B_f\,(x) := a + (x-a)\,\theta\,(x)\,\widetilde{\theta}_f\,(x)\,, \qquad B_g := a + (x-a)\,\theta\,(x)\,\widetilde{\theta}_g\,(x)\,,$$

să avem

$$f(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}\,(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{f^{(2)}\,(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(A_f\,(x))}{3!}(x-a)^3,$$

$$g(x) = g(a) + \frac{g^{(1)}\,(a)}{1!}\,(x-a) + \frac{g^{(2)}\,(a)}{2!}\,(x-a)^2 + \frac{g^{(3)}(A_g\,(x))}{3!}(x-a)^3,$$

$$f^{(1)}(a+(x-a)\theta(x)) = f^{(1)}\,(a) + \frac{f^{(2)}(a)}{1!}\,(x-a)\,\theta\,(x) + \frac{f^{(3)}\,(B_f\,(x))}{2!}\,(x-a)^2\,\theta^2\,(x)\,,$$

$$g^{(1)}(a+(x-a)\theta(x)) = g^{(1)}\,(a) + \frac{g^{(2)}(a)}{1!}\,(x-a)\,\theta\,(x) + \frac{g^{(3)}\,(B_g\,(x))}{2!}\,(x-a)^2\,\theta^2\,(x)\,.$$

Relaţia (20), dacă ţinem seama de ultimele patru egalităţi, devine

$$\frac{\dfrac{f^{(1)}\,(a)}{1!} + \dfrac{f^{(2)}\,(a)}{2!}\,(x-a) + \dfrac{f^{(3)}(A_f\,(x))}{3!}(x-a)^2}{\dfrac{g^{(1)}\,(a)}{1!} + \dfrac{g^{(2)}\,(a)}{2!}\,(x-a) + \dfrac{g^{(3)}(A_g\,(x))}{3!}(x-a)^2} =$$

$$= \frac{f^{(1)}\,(a) + \dfrac{f^{(2)}(a)}{1!}\,(x-a)\,\theta\,(x) + \dfrac{f^{(3)}\,(B_f\,(x))}{2!}\,(x-a)^2\,\theta^2\,(x)}{g^{(1)}\,(a) + \dfrac{g^{(2)}(a)}{1!}\,(x-a)\,\theta\,(x) + \dfrac{g^{(3)}\,(B_g\,(x))}{2!}\,(x-a)^2\,\theta^2\,(x)},$$

oricare ar fi $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$. De aici deducem că, pentru orice $x \in]a-\delta, a+\delta[\setminus\{a\}$,

$$(21) \qquad \left[f^{(1)}\,(a)\,g^{(2)}\,(a) - f^{(2)}\,(a)\,g^{(1)}\,(a)\right]\left(\frac{1}{1!1!}\theta\,(x) - \frac{1}{2!0!}\right) +$$

$$+\left\{\left[f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(B_g(x))-f^{(3)}(B_f(x))\,g^{(1)}(a)\right]\frac{\theta^2(x)}{1!2!}-\right.$$

$$\left.-\left[f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(A_g(x))-f^{(3)}(A_f(x))\,g^{(1)}(a)\right]\frac{1}{3!0!}\right\}(x-a)+$$

$$+\left\{\left[f^{(2)}(a)\,g^{(3)}(B_g(x))-f^{(3)}(B_f(x))\,g^{(2)}(a)\right]\frac{\theta(x)}{2!2!}-\right.$$

$$\left.-\left[f^{(2)}(a)\,g^{(3)}(A_g(x))-f^{(3)}(A_f(x))\,g^{(2)}(a)\right]\frac{1}{3!1!}\right\}(x-a)^2\,\theta(x)+$$

$$+\left[f^{(3)}(A_f(x))\,g^{(3)}(B_f(x))-f^{(3)}(B_g(x))\,g^{(3)}(A_f(x))\right]\frac{\theta^2(x)}{3!2!}(x-a)^3=0,$$

Facem pe x să tindă către a şi ţinem seama de ipoteza (b); obţinem că funcţia θ are limită în punctul $x=a$ şi

$$\lim_{x\to a}\theta(x)=\frac{1}{2}.$$

Împărţim acum relaţia (21) cu $(x-a)$; rezultă că

$$\left[f^{(1)}(a)\,g^{(2)}(a)-f^{(2)}(a)\,g^{(1)}(a)\right]\frac{\overline{\theta}(x)-\overline{\theta}(a)}{x-a}+$$

$$+\left[f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(B_g(x))-f^{(3)}(B_f(x))\,g^{(1)}(a)\right]\frac{\theta^2(x)}{1!2!}-$$

$$-\left[f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(A_g(x))-f^{(3)}(A_f(x))\,g^{(1)}(a)\right]\frac{1}{3!0!}+$$

$$+\left\{\left[f^{(2)}(a)\,g^{(3)}(B_g(x))-f^{(3)}(B_f(x))\,g^{(2)}(a)\right]\frac{\theta(x)}{2!2!}-\right.$$

$$\left.+\left[f^{(2)}(a)\,g^{(3)}(A_g(x))-f^{(3)}(A_f(x))\,g^{(2)}(a)\right]\frac{1}{3!1!}\right\}(x-a)\,\theta(x)+$$

$$+\left[f^{(3)}(A_f(x))\,g^{(3)}(B_g(x))-f^{(3)}(B_f(x))\,g^{(3)}(A_g(x))\right]\frac{\theta^2(x)}{3!2!}(x-a)^2=0,$$

oricare ar fi $x\in]a-\delta,a+\delta[\setminus\{a\}$. Să facem pe x să tindă către a şi să ţinem seama de ipotezele (b) şi (d); deducem că funcţia $\overline{\theta}$ este derivabilă în punctul $x=a$ şi

$$\left[f^{(1)}(a)\,g^{(2)}(a)-f^{(2)}(a)\,g^{(1)}(a)\right]\overline{\theta}^{(1)}(a)+$$

$$+\left[f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(a)-f^{(3)}(a)\,g^{(1)}(a)\right]\frac{\frac{1}{4}}{1!2!}-$$
$$-\left[f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(a)-f^{(3)}(a)\,g^{(1)}(a)\right]\frac{1}{3!0!}=0,$$

deci

$$\overline{\theta}^{(1)}(a)=\frac{f^{(1)}(a)\,g^{(3)}(a)-f^{(3)}(a)\,g^{(1)}(a)}{24\left[f^{(1)}(a)\,g^{(2)}(a)-f^{(2)}(a)\,g^{(1)}(a)\right]}.$$

6^0 Afirmaţia 6^0 urmează imediat din afirmaţia 5^0. □

BIBLIOGRAFIE

[1] Duca D.I.: *Analiză matematică* (vol I), Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2013

[2] Duca D.I.: *A note on the mean value theorem*, Didactica Matematicii, 19 (2003) , 91 − 102

[3] Duca D.I. and Pop O.: *On the intermediate point in Cauchy's mean-value theorem*, Mathematical Inequalities & Applications, 9 (2006), 3, 375 − 389

[4] Duca D.I. and Pop O.T.: *Concerning the intermediate point in the mean value theorem*, Mathematical Inequalities & Applications, 12 (2009), 3, 499 − 512

[5] Pawlikowska I.: *An Extetension of a Theorem of Flet*, Demonstratio Math., 32 (1999) , 281 − 286

[6] Trif T.: *Asymptotic Behavior of Intermediate Point in certain Mean Value Theorems*, J. of. Mathematical Inequalities, 2 (2008) , 151 − 161

Universitatea "Babes-Bolyai" Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică şi Informatică
str. Kogălniceanu, nr. 1, Cluj-Napoca, Romania
e-mail: pop_mbeatrix@yahoo.com

Facultatea de Matematică şi Informatică,
Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca
e-mail: dduca@math.ubbcluj.ro; dorelduca@yahoo.com

Primit la redacţie: 1 Decembrie 2014