DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 79–85

TRANSFORMĂRI MÖBIUS

Diana-Florina Haliţă

Abstract. The purpose of this paper is to explore some properties of Möbius transformations. The theory of Möbius Transformations is developed using only few references to complex analysis and group theory.

MSC 2000. 30C20

Key words. Möbius transformations, Riemann sphere, parabolic, elliptic, loxodromic, hyperbolic, Möbius Group

1. INTRODUCERE

Ca o continuare a structurilor algebrice introduse în orice capitol de Transformări Geometrice, printre care Grupul Izometriilor împreună cu subgrupurile acestuia, în acest articol voi prezenta Grupul transformărilor Möbius şi proprietăţile acestuia.

2. SFERA RIEMANN

Considerând planul complex extins $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, Riemann a reuşit să reprezinte toate punctele acestuia ca puncte ale sferei unitate, numită **Sfera Riemann**.

Fie $\mathbb{P}$ sfera Riemann, dată prin:

$$\mathbb{P} = \left\{(z,t) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\right\}.$$

Considerăm polul nord al sferei punctul $N(0,1) \in \mathbb{C}\times\mathbb{R}$.

Definiţia 1. *Prin proiecţie stereografică se înţelege o aplicaţie care transformă fiecare punct al planului complex în plan de pe sfera Riemann şi reciproc.*

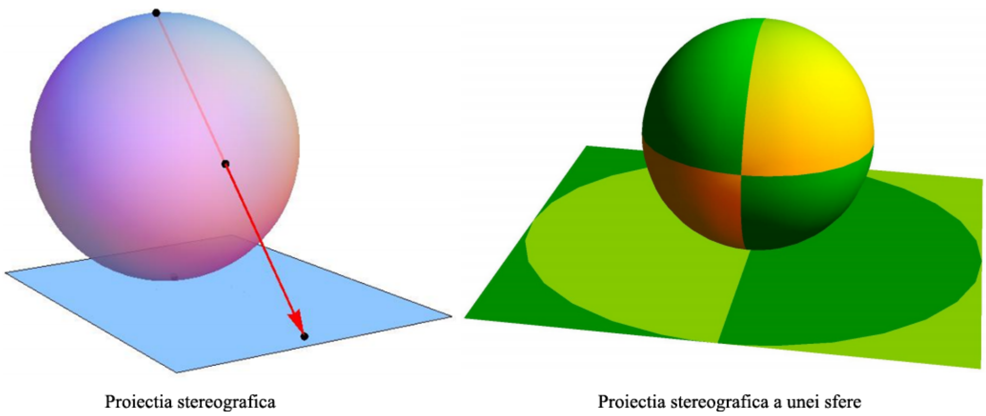


Figura. 2.1 – Proiecţia stereografică

Se defineşte astfel funcţia $\pi : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{P}$, $\pi(z) = (w,t)$ şi $\pi(\infty) = N$, unde punctul de pe sferă de coordonate $(w,t) \in \mathbb{P}$ este cel de-al doilea punct de intersecţie al dreptei determinate de punctele N şi $(z,0)$ cu sfera.

Teorema 1. $\pi(z) = \left(\frac{2z}{z+|z|^2}, \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2} \right)$

Soluţia 1. *Formula de calcul a proiecţiei stereografice a punctului z se obţine astfel:*

(1) *punctele de pe dreapta ce trece prin $N(0,1)$ şi $(z,0)$ au coordonatele:*
$s \cdot (z,0) + (1-s)(0,1) = (sz, 1-s)$

(2) *punctul de intersecţie respectă egalitatea $|z|^2 + t^2 = 1$*
$|sz|^2 + (1-s)^2 = 1 \Leftrightarrow s = 0$ *sau* $s = \frac{2}{|z|^2+1}$
Aşadar se obţin punctele de intersecţie ale dreptei cu sfera $N(0,1)$ şi $N'(\frac{2z}{z+|z|^2}, \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2})$, unde N' este proiecţia stereografică a punctului z.

Această funcţie este bijectivă, iar inversa ei este $\pi^{-1} : \mathbb{P} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$\pi^{-1}(z,t) = \frac{z}{1-t}$$

Propoziţia 1. *Se poate măsura distanţa dintre cele două puncte de intersecţie:*

$$d(N, \pi(z)) = \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}}.$$

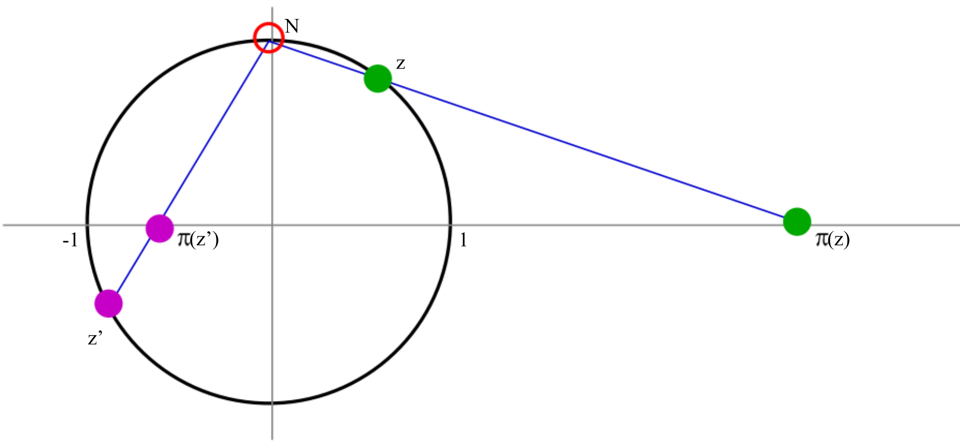


Figura. 2.2 – Distanţa dintre N si $\pi(z)$

Observaţia 1. *Propoziţia de mai sus se demonstrează cu ajutorul Teoremei Fundamentale a Asemănării, utilizând faptul că $d(N,z) = \sqrt{1+|z|^2}$.*

Definiţia 2. *Prin distanţă cordală între două puncte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se înţelege distanţa euclidiană dintre proiecţiile stereografice ale celor două puncte, $\pi(z_1), \pi(z_2)$.*

Aceasta se notează cu $\kappa(z_1, z_2)$, iar din calcule rezultă formula sa:

$$\kappa(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1+z_1^2}\sqrt{1+z_2^2}}.$$

În particular,

$$\kappa(z_1, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+z_1^2}}.$$

PROPOZIŢIA 2. *Proiecţia stereografică este o transformare conformă, adică păstrează unghiurile dintre două curbe.*

PROPOZIŢIA 3. *Proiecţia stereografică transformă cercurile sau dreptele din planul complex în cercuri de pe sfera Riemann. Dreptele din planul complex vor corespunde cercurilor care trec prin polul nord al sferei Riemann.*

3. TRANSFORMĂRI MÖBIUS

DEFINIŢIA 3. *O transformare Möbius este o funcţie*

$$T : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\},\ T(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0$$

DEFINIŢIA 4. *Mulţimea tuturor transformărilor Möbius formează un grup:*

$$(Mob, \circ)$$

OBSERVAŢIA 2. *Se pune în evidenţă omomorfismul între grupuri:*

$$\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \to Mob,\ \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}$$

PROPOZIŢIA 4. *Prin orice transformare Möbius cercurile de pe sfera Riemann devin cercuri pe sfera Riemann.*

PROPOZIŢIA 5. *Pentru orice triplete de puncte de pe sfera Riemann (a_0, a_1, a_∞) şi (b_0, b_1, b_∞) există o unică transformare Möbius T astfel încât*

$$T(a_0) = b_0, T(a_1) = b_1, T(a_\infty) = b_\infty$$

4. VIZUALIZAREA TRANSFORMĂRILOR MÖBIUS

4.1. Puncte fixe.

Fie T o transformare Möbius $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ cu $ad - bc = 1$. Aşadar, matricea ataşată acestei transformări este $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

În acest caz matricea M este conjugată uneia dintre matricile:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \neq 0 \text{ sau } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Transformările Möbius au puncte fixe, date prin rezolvarea ecuaţiei :

$$z = M(z).$$

Datorită faptului că ecuaţia obţinută este o ecuaţie de gradul II, aceasta va avea maxim două soluţii. Dacă o transformare Möbius are trei sau mai multe puncte fixe, atunci ea este transformarea identică.

TEOREMA 2. *O transformare Möbius diferită de transformarea identică are:*

- *un punct fix, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *două puncte fixe, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii* $M_k \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$

OBSERVAŢIA 3. *Dacă* $c \neq 0$ *ambele puncte fixe sunt din* $\mathbb{C}$. *Dacă* $c = 0$ *atunci cel puţin unul din punctele fixe tinde spre* ∞.

4.2. Clasificarea transformărilor Möbius.

O transformare Möbius este:

- identitate, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii $\pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- parabolică, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii $\pm \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- eliptică, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, |\lambda| = 1$
- hiperbolică, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\{\pm 1\}$
- loxodromică, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, |\lambda| \neq 1$

Din definiţia de mai sus se vede că orice transformare Möbius de tip hiperbolic este şi de tip loxodromic.

Echivalent, transformările Möbius se pot clasifica şi astfel:

- parabolică, dacă $tr(M) = \pm 2$
- eliptică, dacă $-2 < tr(M) < 2$
- hiperbolică, dacă $tr(M) < -2$ sau $tr(M) > 2$
- loxodromică, dacă $tr(M) \notin \mathbb{R}$

sau echivalent,

- parabolică, dacă $tr(M)^2 = 4$
- eliptică, dacă $tr(M)^2 < 4$
- hiperbolică, dacă $tr(M)^2 > 4$
- loxodromică, dacă $tr(M)^2 \notin [0, \infty)$

Date fiind aceste clasificări se poate deduce modul în care transformările Möbius acţionează asupra sferei Riemann.

- transformare eliptică, $z \to e^{i\theta}z$ - această transformare roteşte sfera Riemann fixând punctele 0 şi ∞ - punctele se mişcă de-a lungul unui cerc
- transformare hiperbolică, $z \to kz, k > 1$ - punctele se mişcă de-a lungul unui arc de cerc de la un punct fix la altul
- transformare loxodromică, $z \to kz, k \notin \mathbb{R}$ - punctele se mişcă de-a lungul unei spirale logaritmice, de la un punct fix la altul
- transformare parabolică, $z \to z + 1$ - punctele se mişcă de-a lungul unui cerc, prin unicul punct fix.

OBSERVAŢIA 4. *Fie T o transformare Möbius $T(z) = Az + B$. În acest caz putem alege $A = \rho e^{i\alpha}$, cu scopul de a privi transformarea ca o compunere între o rotaţie de centru α, o dilatare de ordin ρ şi o translaţie de vector B.*

Interpretarea dată mai sus ne permite să observăm aceste proprietăţi, conform figurii 4.3

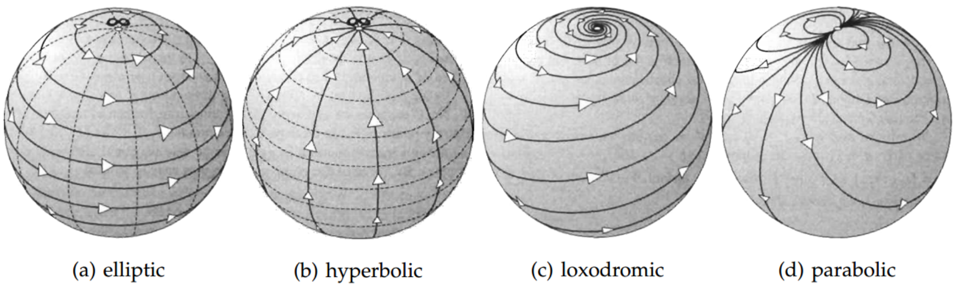


Figura. 4.3 – Cele 4 tipuri de transformări Möbius

OBSERVAŢIA 5. *Pentru $\alpha > 0, \rho = 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este o rotaţie a planului complex, care revine la o rotaţie a sferei (figura 4.3 (a)). Punctele fixe ale acestei transformări sunt cei doi poli ai sferei, care corespund în planul complex originii şi ∞-ului. Aceasta este o* ***transformare Möbius eliptică****.*

OBSERVAŢIA 6. *Pentru $\alpha = 0, \rho > 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este o dilatare a planului complex centrată în origine (figura 4.3 (b)). Punctele fixe ale acestei transformări sunt cei doi poli ai sferei, care corespund în planul complex originii şi ∞-ului.*

Pentru $\alpha = 0, \rho < 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este o contracţie a planului complex centrată în origine.

Aceste transformări sunt ***transformări Möbius hiperbolice****.*

Observaţia 7. *Pentru $\alpha \neq 0, \rho \neq 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este combinaţie dintre cele două cazuri anterioare (figura 4.3 (c)). Punctele fixe ale acestei transformări sunt cei doi poli ai sferei, care corespund în planul complex originii şi ∞-ului. Aceasta este o* ***transformare Möbius loxodromică.***

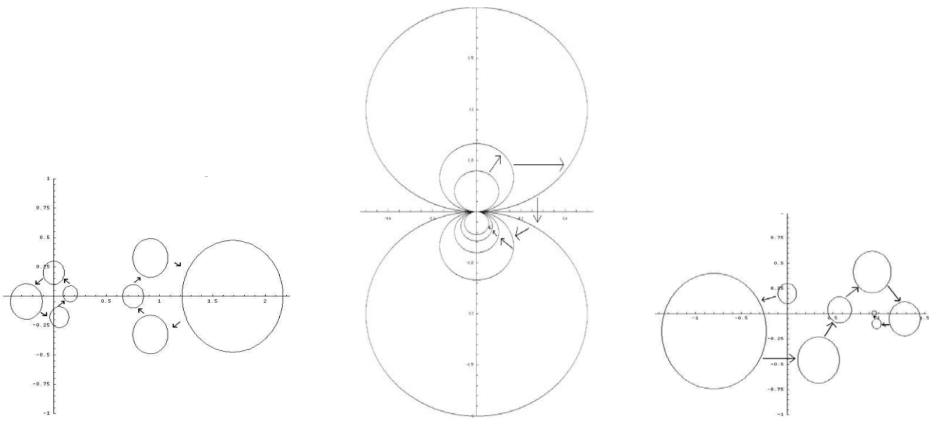
Observaţia 8. *Pentru restul cazurilor posibile (adică $A = 0$ şi $B \neq 0$), $T(z)$ este o translaţie a planului complex (figura 4.3 (d)). Singurul punct fix al acestei transformări este ∞, acesta corespunzând polului nord de pe sfera Riemann. Aceasta este o* ***transformare Möbius parabolică****.*

5. UN SCURT EXEMPLU

Luând în considerare transformările următoare:

- eliptică - $z \to iz$ - puncte fixe 0 şi 1
- parabolică - $z \to \dfrac{z}{2iz+1}$ - puncte fixe 0 şi 1
- loxodromică - $\to 2iz$ -punct fix 0

Observaţia 9. *În cazul transformării eliptice, se observă faptul că prin aplicarea acesteia de 4 ori se ajunge la transformarea identică. Astfel, în figura 5.4(a), se observă faptul că prin transformarea aleasă fiecare cerc se transformă în el însuşi după 4 iteraţii.*



(a) Transformare eliptică (b) Transformare parabolică (c) Transformare loxodromică

Figura. 5.4 – Transformări Möbius

Astfel, se observă principalele caracteristici ale transformărilor Möbius:

- parabolice: punctele de pe cercuri se mişcă spre punctele fixe
- eliptice: cercurile se mişcă în jurul punctului fix
- loxodromic: cercurile se mişcă în spirale cu extremităţile în cele două puncte fixe.

BIBLIOGRAFIE

[1] Rich Schwartz: *Möbius Transformations and Circles*, *http://www.math.brown.edu/ res/MFS/handout5.pdf*, 8 octombrie 2007

[2] -: *Classifying Möbius transformations: conjugacy, trace and applications to parabolic transformations*, http://www.maths.manchester.ac.uk/∼cwalkden/hyperbolic-geometry/lecture10.pdf

[3] -: *Classifying Möbius transformations: conjugacy, trace and applications to parabolic transformations*, http://www.maths.manchester.ac.uk/∼cwalkden/hyperbolic-geometry/lecture11.pdf

[4] Stephan Tillmann: *Geometry and Groups*, *http://www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2012 − amsi/g&g_02.pdf*, 12 ianuarie 2012

[5] Stephan Tillmann: *Geometry and Groups*, *http://www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2012 − amsi/g&g_04.pdf*, 12 ianuarie 2012

[6] *http://www.math.tifr.res.in/ ∼ pablo/download/teichmuller/node4.html*

[7] T.K. Carne: *Geometry and Groups*, *https://www.dpmms.cam.ac.uk/ tkc/GeometryandGroups/GeometryandGroups.pdf*, *https://www.dpmms.cam.ac.uk/ tkc/GeometryandGroups/Corrections.pdf*, 2012

[8] *http://en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_transformation*

[9] Takis Konstantopoulos: *Complex Analysis*, *http://www2.math.uu.se/ takis/L/ComplexAnalysis/complexnotes.pdf*

[10] L. Penaranda, L. Sacht, L. Velho : *Improving Projections of Panoramic Images with Möbius Transformations* *http://dcc.ufrj.br/ luisp/publi/psv.pdf*

[11] Thomas Au : *Visualizing Complex Functions* *http://www.math.cuhk.edu.hk/course/math3253/Notes02.pdf*

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: diana.halita@ubbcluj.ro

Primit la redacţie: 15 Octombrie 2014