DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 69–77

REZOLVAREA UNOR PROBLEME DE GEOMETRIE CU METODE ALE ANALIZEI COMPLEXE

Diana-Florina Haliţă

Abstract. Geometry problems are a real treasure. They allow mathematicians (...or anyone interested in) to find a wide range of techniques in which they can solve them. In this paper I have proposed some applications of complex numbers mapped on geometric problems. Problems were selected from different international competitions, as specified against each section.

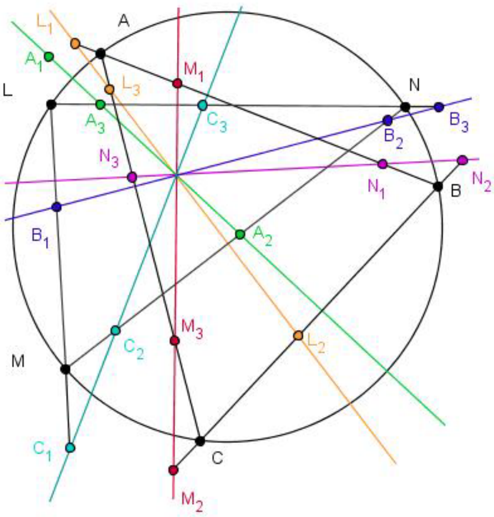
MSC 2000. 97F50.

Key words. Simson's Line, circles biraport, concentric circles, similar triangles, congruent triangles, imomath, international olympiads, complex numbers, geometry

1. DREAPTA LUI SIMSON

PROBLEMA 1. *(enunţul problemei a fost preluat din* [2]*)*

Fie A,B,C,L,M,N şase puncte pe un cerc. Atunci dreptele lui Simson ale punctelor L,M,N în raport cu triunghiul ABC se intersectează într-un singur punct dacă şi numai dacă dreptele lui Simson ale punctelor A,B,C în raport cu triunghiul LMN se intersectează într-un singur punct. În plus în acest caz cele şase drepte ale lui Simson se intersectează în mijlocul segmentului format de ortocentrele triunghiurilor ABC şi LMN.



SOLUŢIA 1.

Notez cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor A, B, C, L, M, N şi presupun că cercul circumscris triunghiurilor ABC şi LMN este cercul unitate.

Dreapta AB este de ecuaţie:

$$AB : \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-b & \bar{a}-\bar{b} & 0 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c-b & \bar{c}-\bar{b} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a-b)\cdot(\bar{z}-\bar{b}) = (z-b)\cdot(\bar{a}-\bar{b})$$

$$\Leftrightarrow z-b = \frac{a-b}{\bar{a}-\bar{b}}\cdot(\bar{z}-\bar{b}) \Leftrightarrow z-b = -a\cdot b\cdot(\bar{z}-\bar{b}) \Leftrightarrow \mathbf{AB : z + a\cdot b\cdot \bar{z} - a - b = 0}.$$

Perpendiculara din L pe AB este LL_1 şi conform 2.8.7 : $LL_1 = z - l = \frac{a\cdot b}{1}\cdot(\bar{z}-\bar{l})$

$\Leftrightarrow \mathbf{LL_1 : z - a\cdot b\cdot \bar{z} + a\cdot b\cdot \bar{l} - l = 0}$.

Ştiind ca L_1 este punctul de intersecţie al dreptelor LL_1 şi AB putem afla afixul acestuia $\Rightarrow \mathbf{l_1 = \frac{1}{2}\cdot(-a\cdot b\cdot \bar{l} + l + a + b)}$.

Analog se găsesc punctele L_2 (piciorul perpendicularei din L pe BC) şi L_3 (piciorul perpendicularei din L pe AC)

$$\Rightarrow \mathbf{l_2 = \frac{1}{2}\cdot(-b\cdot c\cdot \bar{l} + l + c + b)} \text{ şi } \mathbf{l_3 = \frac{1}{2}\cdot(-a\cdot c\cdot \bar{l} + l + a + c)}.$$

Ecuaţia dreptei lui Simson a lui L faţă de triunghiul ABC este:

$$L_1L_3 : \begin{vmatrix} l_1 & \bar{l_1} & 1 \\ l_3 & \bar{l_3} & 1 \\ z & \bar{z} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} l_1-l_3 & \bar{l_1}-\bar{l_3} & 0 \\ l_3 & \bar{l_3} & 1 \\ z-l_3 & \bar{z}-\bar{l_3} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (l_1-l_3)\cdot(\bar{z}-\bar{l_3}) =$$

$$(z-l_3)\cdot(\bar{l_1}-\bar{l_3}) \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot(-a\cdot b\cdot\bar{l}+a+b+l+a\cdot c\cdot\bar{l}-l-a-c)\cdot[\bar{z}-\frac{1}{2}\cdot(-\cdot\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot l+\bar{l}+\bar{a}+\bar{c})]$$

$$= [z-\frac{1}{2}\cdot(-a\cdot c\cdot\bar{l}+l+a+c)]\cdot\frac{1}{2}\cdot(-\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot l+\bar{l}+\bar{a}+\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot l-\bar{l}-\bar{a}-\bar{c})]$$

$$\Leftrightarrow (c-b)\cdot(a\cdot\bar{l}-1)\cdot[\bar{z}-\frac{1}{2}\cdot(-a\cdot c\cdot\bar{l}+l+a+c)] = (\bar{a}\cdot l-1)\cdot(\bar{c}-\bar{b})\cdot[z-\frac{1}{2}\cdot(-a\cdot c\cdot\bar{l}+l+a+c)]$$

$$\underset{\frac{a\cdot\bar{l}-1}{\bar{a}\cdot l-1}=-a\cdot\bar{l}}{\overset{\frac{c-b}{\bar{c}-\bar{b}}=-b\cdot c}{\Leftrightarrow}} b\cdot c\cdot a\cdot\bar{l}\cdot[2\cdot\bar{z}+\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{l}-\bar{l}-\bar{a}-\bar{c}] = 2\cdot z+a\cdot c\cdot\bar{l}-l-a-c$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\bar{l}\cdot\bar{z}+b-a\cdot b\cdot c\cdot\bar{l}^2-b\cdot c\cdot\bar{l}-a\cdot b\cdot\bar{l} = 2\cdot z+a\cdot c\cdot\bar{l}-l-a-c$$

$L_1L_3 : 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\bar{l}\cdot\bar{z}-2\cdot z = \bar{l}\cdot(a\cdot c+a\cdot b+b\cdot c)-l-a-b-c+a\cdot\ b\cdot c\cdot\bar{l}^2 —\cdot l$

$L_1L_3 : 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot\bar{z}-2\cdot l\cdot z = a\cdot c+a\cdot b+b\cdot c-l^2-l\cdot(a+b+c)+a\cdot\ b\cdot c\cdot\bar{l}$

Notez $A_1 = a+b+c; A_2 = a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c; A_3 = a\cdot b\cdot c.$

$\Leftrightarrow \mathbf{L_1L_3 : 2\cdot A_3\cdot\bar{z} - 2\cdot l\cdot z = A_2 - l^2 - l\cdot A_1 + A_3\cdot\bar{l}}$.

Analog se obţine:

$\mathbf{M_1M_3 : 2\cdot A_3\cdot\bar{z} - 2\cdot m\cdot z = A_2 - m^2 - m\cdot A_1 + A_3\cdot\bar{m}}$

$\mathbf{N_1N_3 : 2\cdot A_3\cdot\bar{z} - 2\cdot n\cdot z = A_2 - n^2 - n\cdot A_1 + A_3\cdot\bar{n}}$.

Intersectând L_1L_3 *cu* M_1M_3 *se obţine punctul de afix* $z_1 = \frac{1}{2} \cdot [m + l + A_1 + \frac{A_3}{m \cdot l}]$, *iar intersectând* L_1L_3 *cu* N_1N_3 *se obţine punctul de afix:* $z_2 = \frac{1}{2} \cdot [n + l + A_1 + \frac{A_3}{n \cdot l}]$

Condiţia ca cele trei drepte să se intersecteze în acelaşi punct este ca $z_1 = z_2$ $\Leftrightarrow m + A_1 + \frac{A_3}{m \cdot l} = n + A_1 + \frac{A_3}{n \cdot l} \Leftrightarrow (m - n) \cdot (1 - \frac{A_3}{l \cdot m \cdot n}) = 0 \Leftrightarrow A_3 = l \cdot m \cdot n$ $\Leftrightarrow a \cdot b \cdot c = l \cdot m \cdot n$

Deci punctul de intersecţie al dreptelor este de afix: $\frac{1}{2} \cdot [a + b + c + l + m + n]$.

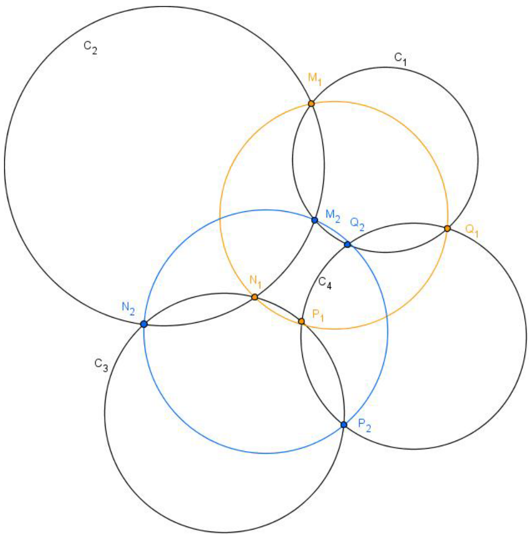
Procedând analog, prin simetrie se obţine că: A_1A_3, B_1B_3 *şi* C_1C_3 *se intersectează în acelaşi punct* $\Leftrightarrow a \cdot b \cdot c = l \cdot m \cdot n$.

Ortocentrul H_1 *al triunghiului* ABC *este de afix* $h_1 = a + b + c$, *iar ortocentrul* H_2 *al triunghiului* LMN *este de afix* $h_2 = l + m + n$. *Mijlocul segmentului* H_1H_2 *este de afix* $z = \frac{h_1 + h_2}{2}$, *adica* $z = \frac{1}{2} \cdot [a + b + c + m + n + l]$ *şi deci coincide cu punctul de intersecţie al celor şase drepte ale lui Simson.*

2. PROBLEMA CELOR 4 CERCURI

PROBLEMA 2. *(enunţul problemei a fost preluat din* [2]*)*

Fie C_1, C_2, C_3, C_4 *patru cercuri în plan şi* M_1, M_2 *punctele de intersecţie ale lui* C_1 *cu* C_2, N_1, N_2 *punctele de intersecţie ale lui* C_2 *cu* C_3, P_1, P_2 *punctele de intersecţie ale lui* C_3 *cu* C_4 *şi* Q_1, Q_2 *punctele de intersecţie ale lui* C_4 *cu* C_1. *Să se demonstreze că* M_1, N_1, P_1, Q_1 *sunt conciclice* $\Leftrightarrow M_2, N_2, P_2, Q_2$ *sunt conciclice.*



SOLUŢIA 2.

Pe cercul C_1 *se află punctele:* M_1, M_2, Q_1, Q_2.

$$\Rightarrow (q_1, m_2, m_1, q_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_1 = \frac{q_1 - m_1}{m_2 - m_1} : \frac{q_1 - q_2}{m_2 - q_2} \in \mathbb{R}^*$$

Pe cercul C_2 se află punctele: M_1, M_2, N_1, N_2.

$$\Rightarrow (m_1, n_2, n_1, m_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_2 = \frac{m_1 - n_1}{n_2 - n_1} : \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \in \mathbb{R}^*$$

Pe cercul C_3 se află punctele: N_1, N_2, P_1, P_2.

$$\Rightarrow (n_1, p_2, p_1, n_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_3 = \frac{n_1 - p_1}{p_2 - p_1} : \frac{n_1 - n_2}{p_2 - n_2} \in \mathbb{R}^*$$

Pe cercul C_4 se află punctele: P_1, P_2, Q_1, Q_2.

$$\Rightarrow (p_1, q_2, q_1, p_2) \in \mathbb{R}^* \Rightarrow a_4 = \frac{p_1 - q_1}{q_2 - q_1} : \frac{p_1 - p_2}{q_2 - p_2} \in \mathbb{R}^*$$

M_1, N_1, P_1, Q_1 *conciclice* $\Leftrightarrow R_1 = (m_1, p_1, n_1, q_1) \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow R_1 = \dfrac{m_1 - n_1}{p_1 - n_1} : \dfrac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1} \in \mathbb{R}^*$

M_2, N_2, P_2, Q_2 *conciclice* $\Leftrightarrow R_2 = (m_2, p_2, n_2, q_2) \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow R_2 = \dfrac{m_2 - n_2}{p_2 - n_2} : \dfrac{m_2 - q_2}{p_2 - q_2} \in \mathbb{R}^*$

$$R_1 = \frac{m_1 - n_1}{p_1 - n_1} : \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1} = a_2 \cdot \frac{n_2 - n_1}{p_1 - n_1} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} : \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1}$$

$$R_1 = a_2 \cdot \frac{1}{\dfrac{n_1 - p_1}{p_2 - p_1} : \dfrac{n_1 - n_2}{p_2 - n_2}} \cdot \frac{1}{p_2 - p_1} \cdot \frac{p_2 - n_2}{n_1 - n_2} \cdot (n_2 - n_1) \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{p_1 - q_1}{m_1 - q_1}$$

$$R_1 = -\frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{p_2 - n_2}{p_2 - p_1} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{p_1 - q_1}{q_2 - q_1} : \frac{p_1 - p_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{p_1 - p_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{q_2 - q_1}{m_1 - q_1}$$

$$R_1 = \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3} \cdot \frac{p_2 - n_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{q_2 - q_1}{m_1 - q_1}$$

$$R_1 = \frac{a_2 \cdot a_4}{a_3} \cdot \frac{1}{\dfrac{q_1 - m_1}{m_2 - m_1} : \dfrac{q_1 - q_2}{m_2 - q_2}} \cdot \frac{p_2 - n_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{m_1 - m_2}{n_2 - m_2} \cdot \frac{q_2 - q_1}{m_1 - q_1} \cdot \frac{q_1 - m_1}{m_2 - m_1} \cdot \frac{m_1 - q_2}{q_1 - q_2}$$

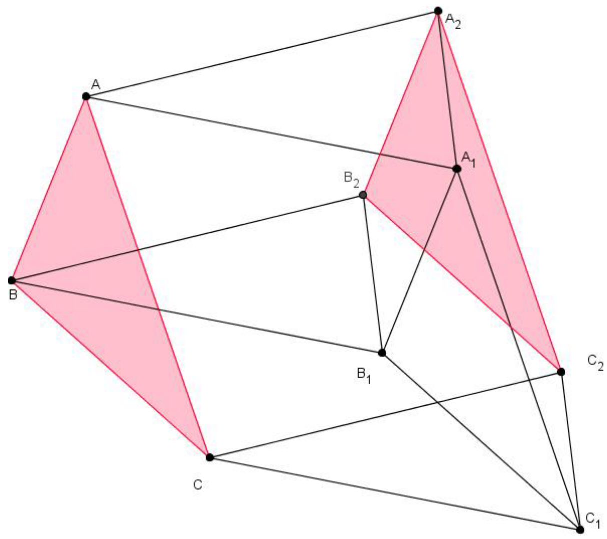
$$R_1 = -\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot \frac{p_2 - n_2}{q_2 - p_2} \cdot \frac{m_2 - q_2}{n_2 - m_2} = -\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot \frac{n_2 - p_2}{q_2 - p_2} : \frac{n_2 - m_2}{q_2 - m_2} = -\frac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot R_2$$

Deci $R_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow R_2 \in \mathbb{R}^*$.

3. J.PETERSEN-P.H.SCHOUTE

PROBLEMA 3. *(enunţul problemei a fost preluat din [2])*

Presupunând că triunghiurile ABC şi $A_1B_1C_1$ sunt asemenea şi că triunghiurile AA_1A_2, BB_1B_2 şi CC_1C_2 sunt şi ele asemenea arătaţi că triunghiurile $A_2B_2C_2$ şi ABC sunt asemenea.



SOLUŢIA 3.

$$\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{b-a}{c-a} = \frac{b_1-a_1}{c_1-a_1}$$

$$\Delta AA_1A_2 \sim \Delta BB_1B_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{a_1-a}{a_2-a} = \frac{b_1-b}{b_2-b}$$

$$\Leftrightarrow a_2 - a = \frac{a_1-a}{b_1-b} \cdot (b_2-b) \Leftrightarrow \mathbf{a_2} = \mathbf{a} + \frac{\mathbf{a_1}-\mathbf{a}}{\mathbf{b_1}-\mathbf{b}} \cdot (\mathbf{b_2}-\mathbf{b})$$

$$\Delta BB_1B_2 \sim \Delta CC_1C_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \frac{b_1-b}{b_2-b} = \frac{c_1-c}{c_2-c}$$

$$\Leftrightarrow b_2 - b = \frac{b_1-b}{c_1-c} \cdot (c_2-c) \Leftrightarrow \mathbf{b_2} = \mathbf{b} + \frac{\mathbf{b_1}-\mathbf{b}}{\mathbf{c_1}-\mathbf{c}} \cdot (\mathbf{c_2}-\mathbf{c})$$

Din relaţiile de mai sus se obţine deci că: $\mathbf{a_2} = \mathbf{a} + \dfrac{\mathbf{a_1}-\mathbf{a}}{\mathbf{c_1}-\mathbf{c}} \cdot (\mathbf{c_2}-\mathbf{c})$

Atunci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a + \frac{a_1 - a}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c) & b + \frac{b_1 - b}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c) & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a \cdot (c_1 - c) + (a_1 - a) \cdot (c_2 - c) & b \cdot (c_1 - c) + (b_1 - b) \cdot (c_2 - c) & c_2 \cdot (c_1 - c) \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a \cdot (c_1 - c_2) + a_1 \cdot (c_2 - c) & b \cdot (c_1 - c_2) + b_1 \cdot (c_2 - c) & c_2 \cdot (c_1 - c) \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

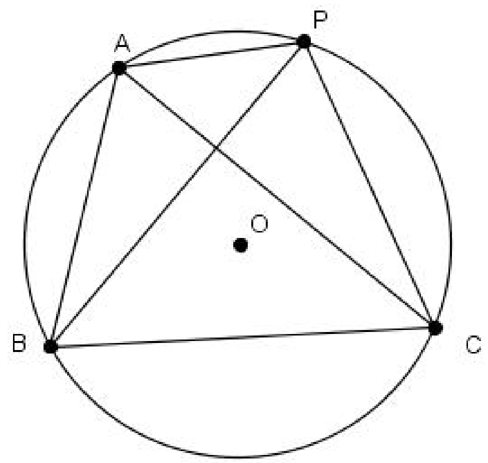
$$\overset{(-c_1 + c_2)L_3 + L_2 = L_2}{=} \frac{1}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1(c_2 - c) & b_1(c_2 - c) & c_1(c_2 - c) \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{c_2 - c}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} =$$

$$0$$

Deci triunghiurile ABC şi $A_2B_2C_2$ sunt asemenea.

4. PROBLEMA TRIUNGHIURILOR CONGRUENTE

PROBLEMA 4. *Fie P un punct situat pe cercul circumscris unui triunghi ABC. Să se arate că ortocentrele triunghiurilor PAB, PBC, PCA formează un triunghi congruent cu cel dat.*



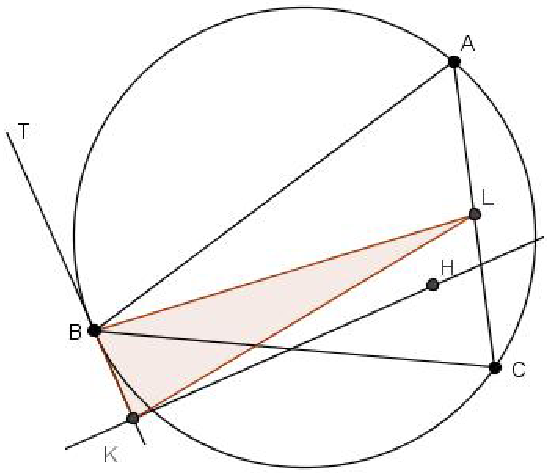
SOLUŢIA 4.

Fie H_1 ortocentrul triunghiului $ABP \Rightarrow z_{H_1} = z_A + z_P + z_B$.
Fie H_2 ortocentrul triunghiului $BPC \Rightarrow z_{H_2} = z_B + z_P + z_C$.
Fie H_3 ortocentrul triunghiului $CPA \Rightarrow z_{H_1} = z_C + z_P + z_A$.
$H_1H_2 = |z_{H_2} - z_{H_1}| = |z_B + z_P + z_C - z_A - z_B - z_P| = |z_C - z_A| = AC$.
$H_2H_3 = |z_{H_3} - z_{H_2}| = |z_A + z_P + z_C - z_B - z_P - z_C| = |z_A - z_B| = AB$.
$H_1H_3 = |z_{H_3} - z_{H_1}| = |z_A + z_P + z_C - z_A - z_B - z_P| = |z_C - z_B| = BC$.
Rezultă că triunghiul $H_1H_2H_3$ este congruent cu triunghiul ABC.

5. OM ST. PETERSBURG 2000

PROBLEMA 5. *(enunţul problemei a fost preluat din* [5]*)*

Dreapta T este tangentă la cercul circumscris triunghiului ascuţitunghic ABC în punctul B. Fie K proiecţia ortocentrului triunghiului ABC pe dreapta T. Fie L mijlocul laturii AC. Să se arate ca triunghiul BKL este isoscel.



SOLUŢIA 5.

L este mijlocul laturii $AC \Rightarrow l = \dfrac{a+c}{2}$

Fie cercul circumscris triunghiului ABC cercul unitate si O, centrul cercului circumscris, originea sistemului de axe de coordonate. În acest caz ecuaţia cercului este: $z \cdot \bar{z} = 1$.

S-a demonstrat că ortocentul H este de afix $h = a + b + c$.

OB raza şi BK e tangenta $\Rightarrow OB \perp BK$. Cum $HK \perp BK$ rezultă că $HK \parallel OB$.

Ecuaţia lui OB : $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} z & \bar{z} \\ b & \bar{b} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b = 0$

Ecuaţia lui HK este de forma: $z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b + q = 0$, unde q se determină din relaţia $H \in HK \Rightarrow a \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{b} + c \cdot \bar{b} - \bar{a} \cdot b - \bar{b} \cdot b - \bar{c} \cdot b + q = 0$, adică $q = \bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot b - c \cdot \bar{b}$

Deci $HK : z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b + \bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot b - c \cdot \bar{b} = 0$

Ecuaţia tangentei BK se determină utilizând relaţia $BK \perp OB$

$$\Rightarrow BK : z - b = \frac{-b}{\bar{b}} \cdot (\bar{z} - \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{b} + \bar{z} \cdot b - 2 = 0$$

Coordonatele lui K se determină rezolvând sistemul $BK \cap HK = \{K\}$

$$\begin{cases} z \cdot \bar{b} + \bar{z} \cdot b - 2 = 0 \\ z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b + \bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot b - c \cdot \bar{b} = 0 \end{cases}$$

Prin adunarea relaţiilor se obţine: $k = \dfrac{2 - \bar{a} \cdot b + a \cdot b - \bar{c} \cdot b + \bar{c} \cdot b}{2 \cdot \bar{b}}$

$BL = |l - b| = |\dfrac{a+c}{2} - b| = |\dfrac{a + c - 2 \cdot b}{2}|$

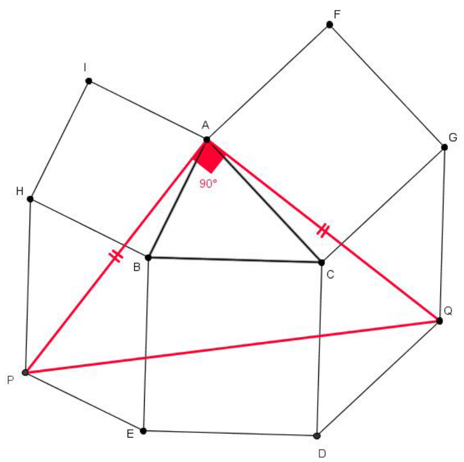
$KL = |l - k| = |\dfrac{a+c}{2} - \dfrac{2 - \bar{a} \cdot b + a \cdot b - \bar{c} \cdot b + \bar{c} \cdot b}{2 \cdot \bar{b}}| = |\dfrac{-2 + \bar{a} \cdot b + \bar{c} \cdot b}{2 \cdot \bar{b}}| = |\dfrac{\bar{a} + \bar{c} - 2 \cdot \bar{b}}{2}|$

$KL = BL \Rightarrow$ *triunghiul* BKL *este isoscel.*

6. TST IUGOSLAVIA 1992

Problema 6. *(enunţul problemei a fost preluat din* [5]*)*

Se construiesc în exteriorul triunghiului ABC *pătratele* $BCDE, CAFG, ABHI$. *Fie* $GCDQ$ *şi* $EBHP$ *paralelograme. Să se demonstreze că triunghiul* APQ *este isoscel.*



Soluţia 6.

E *se obţine din* C *prin rotaţie în jurul lui* B *cu* $270°$

$\Leftrightarrow e = b + (c - b) \cdot [\cos 270° + i \cdot \sin 270°] = b + (c - b) \cdot (-i) = b(1 + i) - c \cdot i$

H *se obţine din* A *prin rotaţie în jurul lui* B *cu* $90°$

$\Leftrightarrow h = b + (a - b) \cdot [\cos 90° + i \cdot \sin 90°] = b + (a - b) \cdot i = b(1 - i) + a \cdot i$

D *se obţine din* B *prin rotaţie în jurul lui* C *cu* $90°$

$\Leftrightarrow d = c + (b - c) \cdot [\cos 90° + i \cdot \sin 90°] = c + (b - c) \cdot i = c(1 - i) + b \cdot i$

G *se obţine din* A *prin rotaţie în jurul lui* C *cu* $270°$

$\Leftrightarrow g = c + (a - c) \cdot [\cos 270° + i \cdot \sin 270°] = c + (a - c) \cdot (-i) = c(1 + i) - a \cdot i$

$HBEP$ *paralelogram* $\Leftrightarrow p + b = h + e \Leftrightarrow p = 2 \cdot b - c \cdot i + a \cdot i - b = b - c \cdot i + a \cdot i$

$CGQD$ *paralelogram* $\Leftrightarrow q + c = d + g \Leftrightarrow q = 2 \cdot c + b \cdot i - a \cdot i - c = c + b \cdot i - a \cdot i$

$AP = |p - a| = |b - c \cdot i + a \cdot i - a|$

$AQ = |q - a| = |c + b \cdot i - a \cdot i - a| = |i| \cdot | - c \cdot i + b - a + a \cdot i| = 1 \cdot AP = AP$

$\Rightarrow \Delta APQ$ *isoscel*

BIBLIOGRAFIE

[1] T. Andreescu, D. Andrica: *Complex Numbers from A to ... Z*, Birkhauser, Boston, 2001
[2] Liang-shin Hahn: *Complex Numbers and Geometry*, The Mathematical Association of America, 1994
[3] P.S. Modenov: *Problems in Geometry*, Mir Publishers - Moscow, 1981
[4] G.S. Sălăgean: *Geometria Planului Complex*, Promedia-Plus, Cluj-Napoca, 1997
[5] www.imomath.com

Faculty of Mathematics and Computer Science
"Babeş-Bolyai" University
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: diana.halita@ubbcluj.ro

Primit la redacţie: 12 Noiembrie 2014