DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 47–51

O ECUAŢIE FUNCŢIONALĂ ŞI MAI MULTE PROBLEME

Vera Buică şi Adriana Buică

tinerilor profesori de matematică, cu durere şi dragoste ...

Abstract. The aim of this short note is to open a discussion around the phenomena of existence, non–existence, uniqueness for the solution of some problem related to a functional equation. We propose alternative formulations around the same functional equation and emphasize the differences between them. We also discuss what happens when the functional equation suffers small changes.

MSC 2000. 97I70
Key words. Existence; uniqueness; right formulation of some problem; functional equations.

1. FORMULAREA ŞI REZOLVAREA PROBLEMELOR

Considerăm ecuaţia funcţională

$$2f(x) - f(x-1) = 2x + 3, \quad \text{pentru orice } x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Următoarea problemă a fost propusă spre rezolvare elevilor participanţi la un anumit concurs (*Olimpiada de matematică*, faza locală, clasa a VIII-a):

PROBLEMA 1. *Să se determine funcţia care satisface relaţia* (1).

O elevă a dat următoarea rezolvare:

REZOLVAREA 1. *Fie* $f(x) = ax+b$. *Înlocuind în* (1) *se obţine până la urmă*

$$ax + a + b = 2x + 3, \quad \textit{pentru orice } x \in \mathbb{R}$$

de unde se deduce că $a = 2$ *şi* $b = 1$. *Prin urmare,* $f(x) = 2x + 1$.

Mai în glumă, mai în serios, propunem următoarea rezolvare:

REZOLVAREA 2. *Fie* $f(x) = 2x+1$. *Se observă că verifică* (1), *prin urmare aceasta este soluţia.*

Dacă ar fi să luăm în serios enunţul problemei 1, desigur că şi rezolvarea 1, şi rezolvarea 2 ar fi corecte. În enunţ se spune: *,,Să se determine funcţia ...”* din care se înţelege că problema are o soluţie şi aceasta este unică. Din câte am observat, de cele mai multe ori, dacă se foloseşte *,,Să se determine funcţia/soluţia ...”*, până la urmă, într-adevăr, după o rezolvare corectă, se obţine o unică soluţie. Atunci, să stabilim acum pentru totdeauna că

enunţul *,,Să se determine soluţia ...”* este echivalent cu *,,Ştiind că există şi este unică, să se determine soluţia ...”*.

De asemenea, să stabilim acum pentru totdeauna că, dacă cineva ,,ghiceşte” soluţia unei probleme formulate cu *,,Să se determine soluţia ...”*, merită cu prisosinţă punctajul maxim.

Dacă totul e aşa serios, de ce am zis că propunem în glumă rezolvarea 2? Pentru că, aşa cum vom vedea, n-am făcut bine să luăm în serios enunţul. De fapt, ecuaţia funcţională (1) are mult mai multe soluţii, adică există mult mai multe funcţii care satisfac (1), aşa cum vom vedea în continuare. Am descoperit, prin urmare, că problema 1 nu e formulată corect. Propunem în continuare noi formulări.

PROBLEMA 2. *Să se determine toate funcţiile (dacă există) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac* (1).

Iată rezolvarea acestei probleme.

REZOLVAREA 3. *Vom arăta că există tot atâtea funcţii $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ care satisfac* (1)*, câte funcţii $\varphi:[0,1)\to\mathbb{R}$ există. Mai precis, pentru fiecare $\varphi:[0,1)\to\mathbb{R}$ o funcţie oarecare fixată, vom arăta că există o unică funcţie f care satisface şi* (1) *şi $f(x)=\varphi(x)$ pentru orice $x\in[0,1)$. Adică pentru problema*

$$\begin{cases} 2f(x)-f(x-1)=2x+3, & \text{pentru orice } x\in\mathbb{R} \\ f(x)=\varphi(x), & \text{pentru orice } x\in[0,1) \end{cases}$$

soluţia există şi este unică. În plus, vom da şi expresia acestei soluţii. Vom folosi metoda paşilor. Adică, vom găsi, pas cu pas, expresia lui f pe intervalele $[1,2)$, $[2,3)$, ... , apoi pe intervalele $[-1,0)$, $[-2,-1)$, ...

Pasul 1. Fie $x\in[1,2)$ arbitrar. Atunci $x-1\in[0,1)$, prin urmare $f(x-1)=\varphi(x-1)$. Înlocuind în (1) *obţinem $2f(x)-\varphi(x-1)=2x+3$. Prin urmare,*

$$f(x)=\frac{1}{2}\varphi(x-1)-x-\frac{3}{2}\ , \quad \text{pentru orice } x\in[1,2).$$

Pasul 2. Fie $x\in[2,3)$ arbitrar. Atunci $x-1\in[1,2)$, prin urmare, folosind expresia găsită la Pasul 1, avem $f(x-1)=\frac{1}{2}\varphi(x-2)-x-\frac{1}{2}$. Înlocuind în

(1) *obţinem* $2f(x) - \frac{1}{2}\varphi(x-2) + x + \frac{1}{2} = 2x + 3$. *Prin urmare,*

$$f(x) = \frac{1}{4}\varphi(x-2) + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}\ , \quad \textit{pentru orice } x \in [1,2).$$

Se caută expresia generală a lui f *pe intervalul* $[n, n+1)$ *pentru orice* $n \in \mathbb{N}$. *Se demonstrează apoi prin inducţie că e corectă. Noi vom omite aceste detalii şi vom da direct expresia:*

$$f(x) = 2^{-n}\varphi(x-n) - 2(2^{-n}-1)x + 2^{1-n}n - 2^{-n} + 1\ , \quad \textit{pentru orice } x \in [n, n+1),$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Invităm cititorul să procedeze analog pentru intervalele $[-1, 0)$, $[-2, -1)$, ... *şi să găsească expresia:*

$$f(x) = 2^{n}\varphi(x+n) - 2(2^{n}-1)x - 2^{1+n}n - 2^{n} + 1\ , \quad \textit{pentru orice } x \in [-n, -n+1),$$

şi pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observăm că nu e nevoie de două descrieri separate pe intervale de numere pozitive, respectiv negative. De fapt se poate scrie

$$f(x) = 2^{-k}\varphi(x-k) - 2(2^{-k}-1)x + 2^{1-k}k - 2^{-k} + 1\ , \quad \textit{pentru orice } x \in [k, k+1),$$

şi pentru orice $k \in \mathbb{Z}$.

Rezolvarea corectă a următoarei probleme este tot rezolvarea 3.

Problema 3. *Să se determine toate funcţiile* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac* (1).

Ca să înţelegem diferenţa faţă de enunţul anterior, vedem că aceasta este varianta pe scurt e enunţului *,,Ştiind că există cel puţin una, să se determine toate ...".*

O rezolvare similară cu rezolvarea 3 (de fapt, o particularizare a acesteia) are problema:

Problema 4. *Să se determine funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisface* (1) *şi* $f(x) = 0$ *pentru orice* $x \in [0, 1)$.

Ca şi soluţie (unică) se va obţine funcţia

$$f(x) = -2(2^{-k}-1)x + 2^{1-k}k - 2^{-k} + 1\ , \quad \text{pentru orice } x \in [k, k+1),$$

şi pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Observăm că aceasta nu e o funcţie afină. Dar e afină pe porţiuni, mai precis e afină pe fiecare interval de forma $[k, k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pentru următoarele două probleme rezolvările 1 şi 2 sunt corecte.

Problema 5. *Să se studieze dacă există cel puţin o funcţie* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisface (1).*

PROBLEMA 6. *Să se determine funcţia afină care satisface (1).*

Pentru următoarea problemă doar rezolvarea 1 este corectă.

PROBLEMA 7. *Să se determine toate funcţiile afine care satisfac (1).*

Se pune problema găsirii funcţiilor pătratice care satisfac (1). Deoarece se constată că nu există astfel de funcţii, propunem formularea:

PROBLEMA 8. *Există funcţii pătratice care satisfac* (1)*?*

Pentru elevii de clasa a XI-a propunem formularea, urmată de rezolvare.

PROBLEMA 9. *Să se determine toate funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisfac (1).*

REZOLVAREA 4. *Pentru a rezolva această problemă, mai întâi ar trebui să refacem rezolvarea 3. Observăm că, pentru a obţine o funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă, e necesar ca $\varphi : [0,1) \to \mathbb{R}$ să fie continuă şi să poată fi prelungită prin continuitate în $x = 1$. Apoi, pornind cu $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ continuă, pentru ca f să fie continuă, e necesar şi suficient ca f să fie continuă în $x = k$ pentru orice $k \in \mathbb{Z}$. Calculăm limita la stânga în $x = k+1$ şi obţinem*

$$\lim_{x\uparrow k+1} f(x) = 2^{-k}\varphi(1) + 2(k+1) - 3 \cdot 2^{-k} + 1.$$

Dacă în relaţia de mai sus în loc de k punem $k-1$, obţinem limita la stânga în $x = k$.

$$\lim_{x\uparrow k} f(x) = 2^{1-k}\varphi(1) + 2k - 3 \cdot 2^{1-k} + 1.$$

Valoarea în $x = k$ este

$$f(k) = 2^{-k}\varphi(0) + 2k - 2^{-k} + 1.$$

De asemenea, avem că

$$\lim_{x\downarrow k} f(x) = f(k).$$

Prin urmare, condiţia de continuitate în $x = k$, pentru $k \in \mathbb{Z}$ arbitrar fixat este

$$2^{-k}\varphi(0) + 2k - 2^{-k} + 1 = 2^{1-k}\varphi(1) + 2k - 3 \cdot 2^{1-k} + 1$$

de unde se obţine

$$\varphi(0) = 2\varphi(1) - 5.$$

În concluzie, soluţiile problemei noastre sunt funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma

$$f(x) = 2^{-k}\varphi(x-k) - 2(2^{-k}-1)x + 2^{1-k}k - 2^{-k} + 1\ , \quad \text{pentru orice } x \in [k, k+1),$$

şi pentru orice $k \in \mathbb{Z}$, unde $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ este continuă şi satisface relaţia $\varphi(0) = 2\varphi(1) - 5$.

2. PROPUNERI

Propunem spre studiu următoarele ecuaţii funcţionale

$$f(x) - f(x-1) = 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}; \tag{2}$$

$$2f(x) - f(1-x) = 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}; \tag{3}$$

$$2f(x) - \frac{1}{2}f(1-x) - \frac{1}{2}f(x-1) = 2x + 3, \ x \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Să observăm doar că ecuaţia (3) nu permite aplicarea metodei paşilor. De fapt, există o unică funcţie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care satisface (3). În plus, aceasta este chiar afină.

3. CONCLUZII

Această lucrare este utilă atât elevilor, cât mai ales profesorilor care doresc sa propună probleme elevilor pentru activitatea la clasă sau pentru concursuri. Se consideră aici mai multe formulări de probleme legate de aceeaşi ecuaţie funcţională, care s-a dovedit a fi una foarte bogată în soluţii. Printre altele, arătăm că, deşi problema *Să se determine funcţia care satisface* $2f(x) - f(1-x) = 2x+3$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ este corect formulată, problema *Să se determine funcţia care satisface* $2f(x) - f(x-1) = 2x + 3$ *pentru orice* $x \in \mathbb{R}$ nu este corect formulată.

Pledăm pentru formulări clare, riguroase ale problemelor, din două motive principale.

Un motiv este acela de a nu-i dezavantaja pe elevii care dau o rezolvare corectă, dar nu este aceea pe care a avut-o în vedere autorul problemei. De exemplu, un autor propune formularea 9 şi rezolvarea 1. Unui profesor corector îi este greu să accepte rezolvarea corectă 2, având în vedere că nu este în barem. Astfel, pledăm şi pentru flexibilitatea corectorilor. Dacă autorul ar fi vrut neapărat rezolvarea 1, atunci ar fi fost bine să propună formularea 7.

Un alt motiv este convingerea noastră că elevii obişnuiţi cu enunţuri riguroase devin ei înşişi riguroşi. În cazurile considerate aici, în mintea elevului se face o distincţie clară între fenomenele generale: *soluţia există dar nu este unică*, sau *soluţia există şi este unică*, respectiv *soluţia există*. În general, este foarte important să li atragă atenţia elevilor asupra importanţei enunţului unei probleme. Abordarea depinde, bineînţeles, de enunţ. Astfel, ei sunt învăţaţi în primul rând să gândească.

Departamentul de Matematică
Universitatea Babeş-Bolyai
Str. Kogălniceanu, no. 1
400084 Cluj-Napoca, Romania
e-mail: abuica@math.ubbcluj.ro

Primit la redacţie: 30 Octombrie 2014